



p - mat

Attomat

25.06.2020

Vzorové riešenia
Kategórie 5, 6, Príma
Slovenská verzia

Úloha 01. Rad čísel

Terka si píše čísla do radu. Začala tým, že si napísala prvé dve čísla 1 a 2. Teraz dopisuje čísla nasledovne: Sčíta posledné dve čísla v rade a súčet napíše ako ďalšie číslo v rade. Takže za čísla 1 a 2 napíše Terka tretie číslo $1+2=3$. Štvrté číslo by napísala $2+3=5$. Keď mala Terka napísané desiate číslo, tak ju to prestalo baviť. Aké bolo posledné číslo, ktoré Terka napísala do radu?

Výsledok: 89

Riešenie: Prvé a druhé číslo, ktoré Terka napísala do radu, sú 1 a 2.

Tretie číslo je $1+2=3$.

Štvrté číslo je $2+3=5$.

Piate číslo je $3+5=8$.

Šieste číslo je $5+8=13$.

Siedme číslo je $8+13=21$.

Ôsme číslo je $13+21=34$.

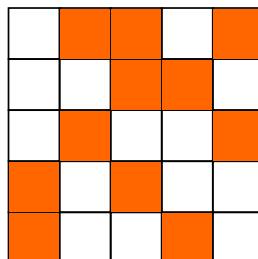
Deviäte číslo je $21+34=55$.

Desiate číslo je $34+55=89$.

Takže posledné číslo, ktoré Terka napísala, je číslo 89.

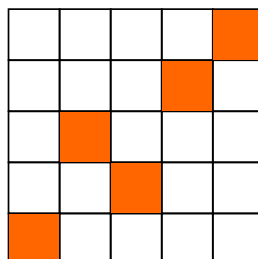
Úloha 02. Prefarbovanie

Peťo si nakreslil tabuľku 5×5 . Niektoré jej políčka vyfarbil naoranžovo tak, ako vidíš na obrázku. Koľko štvorčekov musí prefarbiť naspäť na bielo, aby bolo v každom riadku a v každom stĺpci presne jedno políčko vyfarbené naoranžovo?



Výsledok: 6

Riešenie: V každom riadku má zostať presne jeden vyfarbený štvorček. Takže musí zostať 5 vyfarbených štvorčekov. Všetkých vyfarbených štvorčekov je teraz 11. To znamená, že Peťo musí prefarbiť $11-5=6$ štvorčekov a to napríklad takto:



Úloha 03. Optimizmus

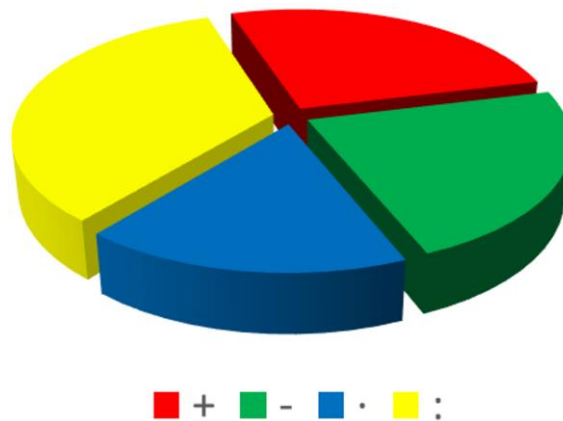
Lukáš si vymyslel optimistické čísla. Optimistické číslo je také číslo, ktorého cifry zľava doprava narastajú. Napríklad čísla 1489, 789 a 3 sú optimistické, ale čísla 55 a 1492 nie. Aké je najväčšie optimistické číslo?

Výsledok: 123456789

Riešenie: Aby bolo číslo čo najväčšie, chceme v ňom použiť čo najviac cifier. Cifru 0 zjavne použiť nemôžeme, lebo by ňou muselo číslo začínať. Použijeme preto iba cifry od 1 do 9. Je len jeden spôsob, ako ich usporiadať do čísla, ktorého cifry budú narastať zľava doprava. Preto je najväčším optimistickým číslom číslo 123456789.

Úloha 04. Obľúbené znamienko

V krajine Attomatovo prebehli voľby o najobľúbenejšie znamienko. Výsledky volieb boli zverejnené pomocou grafu na obrázku. Ktoré znamienko získalo najviac hlasov, a tak sa stalo najobľúbenejším znamienkom v krajine Attomatovo?



a) +

b) -

c) ·

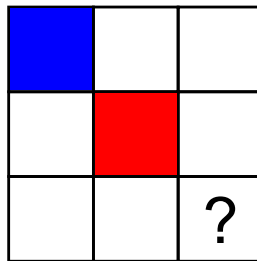
d) :

Výsledok: d) :

Riešenie: Čím viac hlasov nejaké znamienko dostalo, tým väčšiu časť má v grafe. Víťazom sa tak muselo stať to znamienko, ktorému patrí v grafe najväčšia časť. Najväčšia časť grafu je žltá, ktorá zodpovedá hlasom pre znamienko delenia. Znamienko d) : je preto najobľúbenejším znamienkom v krajine Attomatovo.

Úloha 05. RGB štvorčeky

Laura si nakreslila tabuľku 3×3. Začala jej štvorčeky vyfarbovať červenou, modrou a zelenou farbou. Niektoré štvorčeky už vyfarbila tak, ako vidíš na obrázku. Zvyšné štvorčeky chce vyfarbiť tak, aby každá trojica štvorčekov, ktoré ležia v jednom riadku alebo v jednom stĺpci, obsahovala štvorček každej z týchto troch farieb. Akú farbu bude mať štvorček s otáznikom?



a) červenú

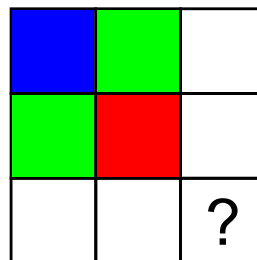
b) zelenú

c) modrú

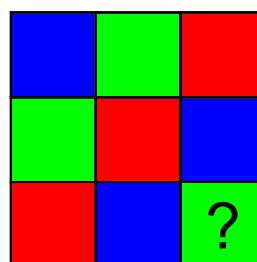
d) nedá sa určiť

Výsledok: b) zelenú

Riešenie: Pozrime sa najprv na štvorčeky, ktoré susedia s už vyfarbenými štvorčekmi. Oba sa nachádzajú v riadku alebo stĺpci s modrým a červeným štvorčekom. Takže musia byť zelené. Dostávame vyfarbenie ako na tomto obrázku:



Ďalej vieme už jednoznačne dopĺňať tretiu chýbajúcu farbu v riadkoch a stĺpcoch, kým sa nedopracujeme k takejto tabuľke:



Štvorček s otáznikom tak musí mať b) zelenú farbu.

Úloha 06. Čítanie myšlienok

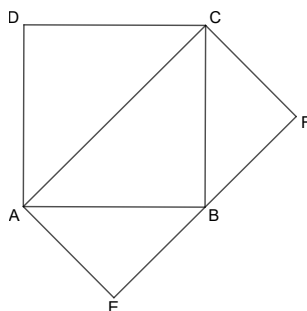
Katka s Miškou majú 5 guľôčok. Očíslovali ich číslami 1 až 5 a dali ich do nepriehľadného vrecúška. Potom si Katka vytiahla dve z guľôčok a Miška jednu zo zvyšných guľôčok. Keď si Katka pozrela čísla na guľôčkach, ktoré vytiahla, zahlásila: „Určite si si vytiahla guľôčku s nepárny číslom.“ Aký je súčet čísel na guľôčkach, ktoré si vytiahla Katka?

Výsledok: 6

Riešenie: Aby mohla Katka s istotu povedať vetu „Určite si si vytiahla guľôčku s nepárny číslom,“ musela mať istotu, že vo vrecúšku neboli po jej ťahaní žiadne guľôčky s párnymi číslami. Takže všetky takéto guľôčky si musela vytiahnuť Katka. Katka si vytiahla len dve guľôčky, no guľôčky s párnym číslom sú tiež len dve - s číslami 2 a 4. Takže Katka si musela vytiahnuť zrovna tieto dve guľôčky. Preto je súčet čísel na guľôčkach, ktoré si Katka vytiahla, rovný $2+4=6$.

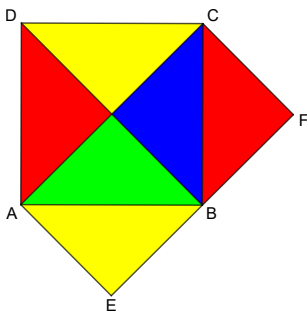
Úloha 07. Výtvarná výchova

Adka si nakreslila štvorec ABCD. K nemu si prikreslila obdĺžnik AEFC tak, že bod B ležal na úsečke EF. Keby chcela celý štvorec ABCD zafarbiť namodro, použila by 100 gramov farby. Koľko gramov farby by použila, ak by chcela namodro zafarbiť obdĺžnik AEFC?



Výsledok: 100

Riešenie: Rozdeľme si štvorec ABCD na niekoľko trojuholníkov ako na tomto obrázku:



Vidíme, že aj štvorec ABCD, aj obdĺžnik AEFC majú spoločný zelený a modrý trojuholník. Zároveň vieme presunúť červený a žltý trojuholník zo štvorca ABCD do obdĺžnika AEFC tak, aby bol celý obdĺžnik AEFC pokrytý farebnými trojuholníkmi. Preto treba na zafarbenie obdĺžnika AEFC rovnako veľa farby ako na zafarbenie štvorca ABCD, takže Adka potrebuje 100 gramov farby.

Úloha 08. Láska k číslam

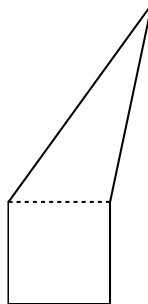
Ľudke sa páčia iba také čísla, ktoré sa dajú zapísať ako súčin dvoch rovnakých prirodzených čísel. Napríklad číslo 81 sa Ľudke páči, lebo sa dá zapísať ako $81=9\cdot 9$. Ktoré z týchto čísel sa Ľudke nepáči?
 a) 169 b) 196 c) 225 d) 252

Výsledok: d) 252

Riešenie: Čísla 169, 196 a 225 sa Ľudke určite páčia, pretože $169=13\cdot 13$, $196=14\cdot 14$ a $225=15\cdot 15$. Číslo 252 ale leží medzi číslami $225=15\cdot 15$ a $256=16\cdot 16$, takže neexistuje žiadne prirodzené číslo, ktoré by sme mohli vynásobiť sebou samým a dostali by sme číslo 252. Preto sa Ľudke nepáči číslo d) 252.

Úloha 09. Krájanie päťuholníka

Patrik si nakreslil päťuholník. Ten sa dal rozdeliť na štvorec a trojuholník tak, ako vidíš na obrázku. Navyše mal štvorec stranu dlhú 5 cm. Patrika prekvapilo, keď zistil, že štvorec má rovnaký obvod ako trojuholník. Koľko centimetrov meral obvod Patrikovho päťuholníka?

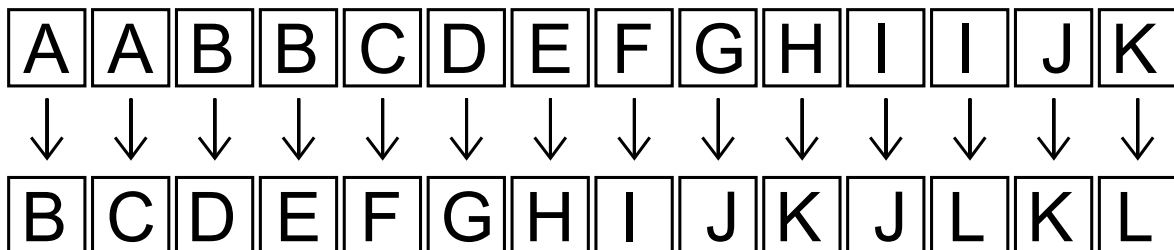


Výsledok: 30

Riešenie: Štvorec má stranu dlhú 5 cm, takže jeho obvod je $5+5+5+5=20$ cm. Trojuholník má podľa zadania rovnaký obvod, a preto má tiež obvod 20 cm. Štvorec a trojuholník majú ale jednu stranu dlhú 5 cm spoločnú. Preto na obvode päťuholníka leží z každého z týchto útvarov $20-5=15$ cm. Keďže toto sú jediné dĺžky na obvode a štvorec s trojuholníkom sa už nikde neprekrývajú, musí byť obvod päťuholníka $15+15=30$ cm.

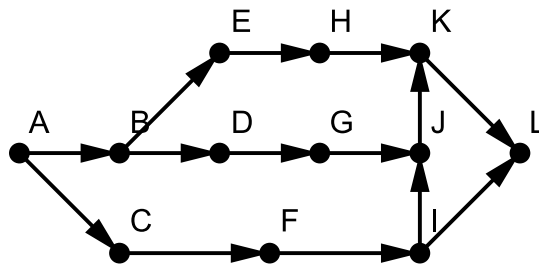
Úloha 10. Chrám skazy

Indiana Jones sa ocitol v labyrinte. Labyrint je tvorený miestnosťami A až L. Medzi nimi vedú iba jednosmerné cesty. Možné cesty vidíš na obrázku, teda napríklad z miestnosti A sa Indiana Jones vie dostať do miestností B a C. Indiana Jones sa nachádza v miestnosti A. Koľkými rôznymi cestami sa môže dostať až do miestnosti L?



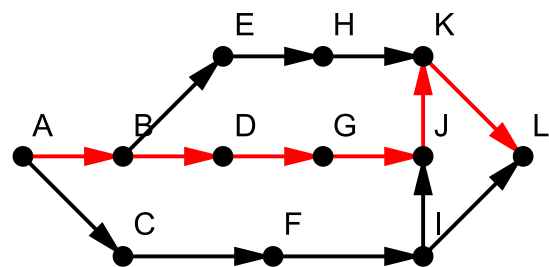
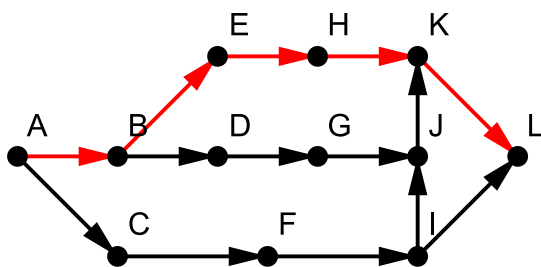
Výsledok: 4

Riešenie: Nakreslime si takýto plán, ktorý zachytáva, odkiaľ kam sa vie Indiana Jones dostať:

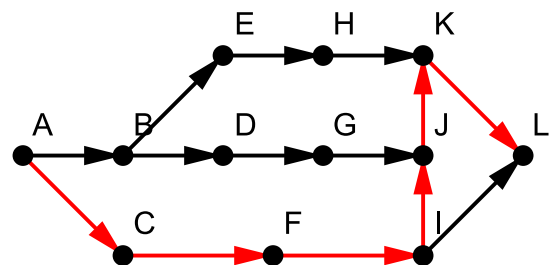
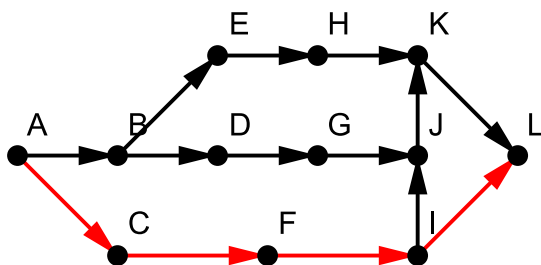


Hneď v miestnosti A sa Indiana Jones môže rozhodnúť pre dve možnosti.

Ak sa rozhodne ísť cez miestnosť B, tak znova dostane na výber z dvoch možností. V oboch prípadoch ale bude už jeho cesta do miestnosti L jednoznačne určená. V tomto prípade tak dostávame tieto dve možnosti cesty do miestnosti L:



Ak sa rozhodne ísť cez miestnosť C, tak musí prejsť až do miestnosti I, kde opäť dostane na výber z dvoch možností. Po tomto výbere už ale bude jeho cesta do miestnosti L jednoznačná. Preto bude mať Indiana Jones v tomto prípade tieto dve možnosti:



Tým sme vyčerpali všetky možnosti, ako môže Indiana Jones opustiť miestnosť A. Spolu tak má Indiana Jones $2+2=4$ cesty, ako sa dostať z miestnosti A do miestnosti L.

Úloha 11. Zaokrúhľovanie

Marcel a Sabinka si vybrali celé číslo a napísali ho na papier. Marcel ho zaokrúhlil na tisícky a dostal tak číslo o 366 väčšie, než bolo ich pôvodné číslo. Sabinka sa rozhodla zaokrúhliť číslo na papieri na stovky. O koľko sa zmenilo číslo na papieri po jej zaokrúhlení?

Výsledok: 34

Riešenie: Keďže sa číslo zväčšilo o 366, zaokrúhľovalo sa nahor, a tak sa cifra na mieste tisícok zväčšila o 1. Posledné tri cifry čísla, ktoré si Marcel a Sabinka vybrali, sú preto $1000-366=634$. Po zaokrúhlení na stovky sa tak tieto cifry menia na 600. Takže číslo sa zmenší o $634-600=34$.

Úloha 12. Dlhý súčet

Maťo si napísal niekoľko po sebe idúcich prirodzených čísel a všetky ich sčítal. Dostal tak súčet 54. Koľko najviac čísel mohol sčítať?

Výsledok: 9

Riešenie: Maťo určite nemohol sčítať 10 čísel, pretože najmenších desať prirodzených čísel má súčet $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$. A to je viac ako 54. Ak by sme ale z tohto súčtu nezobrali do súčtu jednotku, tak by sme dostali súčet o 1 menší, teda súčet $55-1=54$. Takže Maťo mohol sčítať 9 po sebe idúcich prirodzených čísel.

Tým sme ukázali, že Maťo mohol sčítať 9 čísel a viac nie, takže mohol sčítať najviac 9 čísel.

Úloha 13. Škrty v rozpočte

Jožko má dve kartičky. Na jednej z nich je číslo 59812 a na druhej číslo 9481. Chce z týchto kartičiek škrtnúť dokopy dve cifry tak, aby bol súčet čísel na kartičkách po vyškrtnutí čísel čo najväčší. Aký súčet budú mať čísla na kartičkách po takomto vyškrtnutí?

Výsledok: 59910

Riešenie: Keby sme škrtnuli aspoň jednu cifru z čísla 59812, tak by sme dostali určite jedno štvorciferné a jedno trojciferné číslo. Takže súčet by bol najviac niečo málo cez 10000. To je výrazne menej, ako keby sme neškrtnuli žiadnu cifru čísla 59812, kedy bude súčet isto väčší ako 59812. Škrtať preto budeme iba cifry čísla 9481. Potrebujeme z neho vyškrtnúť dve cifry tak, aby bolo čo najväčšie. Najväčšie bude, ak bude začínať najväčšou možnou cifrou. Preto cifru 9 nevyškrtneme. Zároveň bude najväčšie, ak bude druhá cifra najväčšia možná, teda 8. Škrtneme teda cifry 4 a 1. Súčet čísel, ktoré dostaneme, tak bude $59812+98=59910$.

Úloha 14. Krátka

Poštár Pat roznáša poštu na Krátkej ulici, ktorá ide zo západu na východ. Na severnej strane ulice sú domy očíslované nepárnyymi číslami od jednotky (teda 1, 3, 5 a tak ďalej) a na južnej strane párnymi číslami od dvojky (teda 2, 4, 6 a tak ďalej). Na oboch stranách ulice je rovnaký počet domov. Keď Pat roznášal poštu po severnej strane ulice, napočítal v číslach domov 4-krát cifru 2. Koľkokrát napočíta cifru 2, keď sa bude vracieť južnou stranou ulice?

Výsledok: 8

Riešenie: Na severnej strane ulice si Pat započíta cifru dva pri číslach 21, 23, 25 a 27 - žiadne nepárne čísla domov menšie ako tieto neobsahujú cifru 2. Číslo domu 29 sa ale už na ulici nenachádza, lebo by si Pat pri ňom započítal ďalšiu dvojku. Čísla domov na druhej strane tak končia číslom domu 28. Pat preto započíta dvojku v číslach domov 2, 12, 20, 24, 26, 28 a dvakrát v čísle 22. Spolu preto na južnej strane napočíta cifru 2 presne 8-krát.

Úloha 15. Mašinka - hovorca

Majo dostal na Vianoce čarovnú hovoriacu mašinku. Dajú sa do nej vložiť dve kartičky s číslami, pekne jedna po druhej. Následne mašinka zahlási nejaké číslo. Majo si všimol, že keď k číslu, ktoré zahlási mašinka, pripočíta číslo z druhej vlozenej kartičky, dostane 6-násobok čísla na prvej vlozenej kartičke. Takže ak Majo vloží napríklad kartičky s číslami 3 a 2, tak mašinka zahlási číslo 16. Teraz si želá, aby mašinka zahlásila číslo 7, pretože je jeho obľúbené číslo. Vložil preto kartičku s číslom 7 ako prvú. Akú kartičku má vložiť ako druhú, aby mu mašinka splnila jeho želanie?

Výsledok: 35

Riešenie: Keď sčítame číslo 7 a číslo na druhej kartičke, má nám vyjsť 6-násobok čísla 7, teda číslo $6 \cdot 7 = 42$. Do mašinky tak musíme vložiť kartičku s číslom $42 - 7 = 35$.

Úloha 16. Jazyky sveta

Na vedeckú konferenciu prišlo 60 vedcov. Každý z nich ovláda aspoň jeden z jazykov angličtina a čínština. Angličtinou hovoria dve tretiny všetkých vedcov na konferencii, kým čínštinou len polovica. Koľko z vedcov na konferencii rozpráva aj po anglicky a aj po čínsky?

Výsledok: 10

Riešenie: Jedna tretina všetkých vedcov je $60 : 3 = 20$ vedcov, takže dve tretiny sú $2 \cdot 20 = 40$ vedcov. Angličtinou preto hovorí 40 vedcov. Polovica všetkých vedcov je $60 : 2 = 30$ vedcov, takže 30 vedcov hovorí čínštinou. Ak by sme začali „pridelať“ tieto jazyky vedcom, museli by sme nejaký jazyk „prideliť“ $40 + 30 = 70$ -krát. Každému vedcovi musíme „prideliť“ aspoň jeden jazyk. Ak by sme každému vedcovi „pridelili“ iba jeden jazyk, zostalo by nám na „pridelenie“ ešte $70 - 60 = 10$ jazykov. Tieto jazyky tak musíme „prideliť“ takým spôsobom, že zakaždým vznikne vedec, ktorý rozpráva oboma jazykmi. Preto musí byť na konferencii 10 vedcov, ktorí rozprávajú po anglicky aj po čínsky.

Úloha 17. Násobky štyridsaťsedem

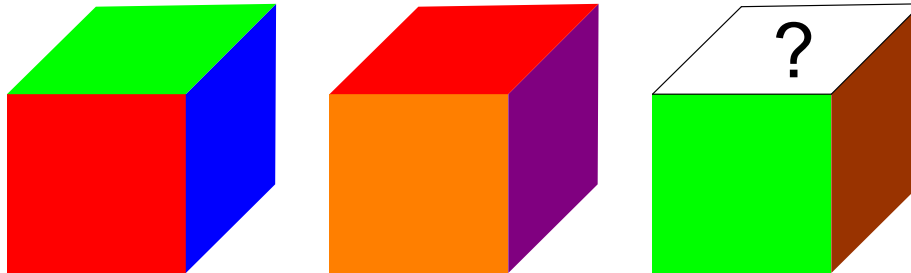
Jonášovo obľúbené číslo je najmenšie také prirodzené číslo, že keď ho pripočítame k číslu 2020, tak dostaneme násobok 47. Na druhej strane Miškinho obľúbené číslo je najmenšie také prirodzené číslo, že keď ho odpočítame od čísla 2020, tak dostaneme násobok 47. Aký je súčet Jonášovho a Miškinho obľúbeného čísla?

Výsledok: 47

Riešenie: Keď vydelíme číslo 2020 číslom 47 vidíme, že 2020 nie je násobkom čísla 47. Číslo 2020 tak leží medzi nejakými dvomi po sebe idúcimi násobkami čísla 47. Ak si tieto tri čísla predstavíme na číselnej osi, tak vzdialenosť medzi väčším násobkom 47 a číslom 2020 je Jonášovým obľúbeným číslom a vzdialenosť medzi menším násobkom 47 a číslom 2020 je zas Miškiným obľúbeným číslom. Súčet Jonášovho a Miškinho obľúbeného čísla tak predstavuje vzdialenosť medzi týmito násobkami 47. Keďže sú to ale dva po sebe idúce násobky 47, tak aj ich vzdialenosť je 47. Súčet Jonášovho a Miškinho obľúbeného čísla je preto 47.

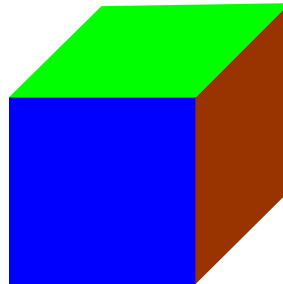
Úloha 18. Si kocka, si kocka, si kocka...

Kubo ofarbil steny kocky. Každá stena je nafarbená jednou farbou. Potom Kubo nafotil tri fotky tejto kocky, ale zakaždým kocku trochu pootočil. Akou farbou je nafarbená stena označená otáznikom?



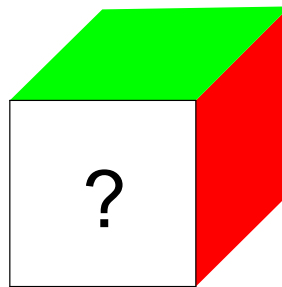
Výsledok: oranžovou

Riešenie: Z obrázkov vidíme, že červená stena susedí so zelenou, modrou, oranžovou aj fialovou stenou. Preto musia červená a hnedá stena ležať oproti sebe. Otočme prvú kocku tak, aby sa červená skryla naľavo. Keďže oproti červenej je hnedá, tak uvidíme takúto kocku:



Ak túto kocku ešte pretočíme tak, aby bola zelená stena vpredu, tak sa dostaneme do stavu ako na tretej kocke, pričom vieme, že teraz kocka stojí na modrej stene. Takže stena označená otáznikom je tá, ktorá je naproti modrej stene.

Vráťme sa k pôvodnej prvej kocke a otočme ju tak, aby sa červená stena dostala na pravú stenu. Horná stena týmto zostane zelená. Navyše sa modrá stena dostane dozadu, a preto bude predná stena tá oproti modrej stene, o ktorej sme si už povedali, že je tá s otáznikom. Uvidíme preto takúto kocku:



Ak teraz otočíme kocku tak, aby sa červená dostala na vrchnú stenu, tak nevidíme ani modrú, ktorá je stále vzadu, ani zelenú, ktorá sa dostane doľava. Zároveň nevidíme hnedú, ktorá je na spodku, lebo je oproti červenej. Preto musíme vidieť iba červenú, fialovú a oranžovú. Tým pádom musíme vidieť stav ako na druhej kocke. Lenže stena s otáznikom sa pri poslednom otočení nepohla a je teda stále vpredu. Na druhej kocke je ale vpredu oranžová.

Takže stena označená otáznikom musí byť oranžová.

Úloha 19. Tatranská lanovka

Katka išla na výlet do Tatier. Ako sa viezla lanovkou zo Štrbského plesa na Chatu pod Soliskom, počítala, koľko sedačiek išlo oproti nej. Za celú jazdu ich napočítala 179. Koľko minút Katke trvala jazda lanovkou, ak zo stanice lanovky vyjde sedačka každých 8 sekúnd?

Výsledok: 12

Riešenie: Počas jazdy lanovkou musela Katka započítať práve raz každú sedačku okrem tej, na ktorej sa viezla. Na lanovke tak musí byť $179+1=180$ sedačiek. Aby mohla zo stanice lanovky vychádzať jedna sedačka každých 8 sekúnd, musí sa jedna sedačka otočiť v druhej stanici a prísť naspäť za $180 \cdot 8 = 1440$ sekúnd. Katka sa ale viezla len polovicu z tohto času, lebo išla len z jednej stanice do druhej. To znamená, že sa musela viezť $1440 : 2 = 720$ sekúnd. Katke tak trvala jazda lanovkou $720 : 60 = 12$ minút.

Úloha 20. Uhlopriečka

Majo si nakreslil štvoruholník ABCD. Strany tohto štvoruholníka majú dĺžky $|AB|=5$ cm, $|BC|=17$ cm, $|CD|=5$ cm a $|DA|=9$ cm. Navyše je dĺžka uhlopriečky BD vyjadrená v centimetroch celým číslom. Koľko centimetrov meria uhlopriečka BD?

Výsledok: 13

Riešenie: Z trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku BCD vyplýva, že súčet dĺžok úsečiek BD a CD musí byť väčší ako dĺžka úsečky BC. Preto musí byť dĺžka úsečky BD väčšia ako $17-5=12$ cm. Z trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku ABD zas máme, že dĺžka úsečky BD musí byť menšia ako súčet dĺžok úsečiek AB a AD. Dĺžka úsečky BD tak musí byť menšia ako $5+9=14$ cm. Jediné celé číslo, ktoré je súčasne väčšie ako 12 a menšie ako 14, je číslo 13, čiže dĺžka úsečky BD musí byť 13 cm.