Attomat

25.06.2020

Vzorové riešenia

Kategórie 7, 8, 9, Sekunda, Tercia, Kvarta, Open

Slovenská verzia

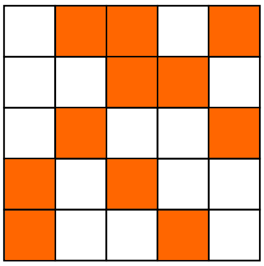
Úloha 01. Rad čísel

Terka si píše čísla do radu. Začala tým, že si napísala prvé dve čísla 1 a 2. Teraz dopisuje čísla nasledovne: Sčíta posledné dve čísla v rade a súčet napíše ako ďalšie číslo v rade. Takže za čísla 1 a 2 napíše Terka tretie číslo 1+2=3. Štvrté číslo by napísala 2+3=5. Keď mala Terka napísané desiate číslo, tak ju to prestalo baviť. Aké bolo posledné číslo, ktoré Terka napísala do radu?

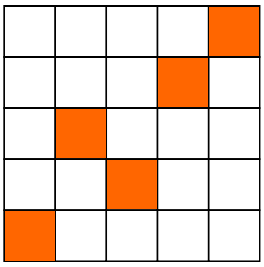
Výsledok: 89
Riešenie: Prvé a druhé číslo, ktoré Terka napísala do radu, sú 1 a 2.
Tretie číslo je 1+2=3.
Štvrté číslo je 2+3=5.
Piate číslo je 3+5=8.
Šieste číslo je 5+8=13.
Siedme číslo je 8+13=21.
Ôsme číslo je 13+21=34.
Deviate číslo je 21+34=55.
Desiate číslo je 34+55=89.
Takže posledné číslo, ktoré Terka napísala, je číslo 89.

Úloha 02. Prefarbovanie

Peťo si nakreslil tabuľku 5×5. Niektoré jej políčka vyfarbil naoranžovo tak, ako vidíš na obrázku. Koľko štvorčekov musí prefarbiť naspäť nabielo, aby bolo v každom riadku a v každom stĺpci presne jedno políčko vyfarbené naoranžovo?



Výsledok: 6
Riešenie: V každom riadku má zostať presne jeden vyfarbený štvorček. Takže musí zostať 5 vyfarbených štvorčekov. Všetkých vyfarbených štvorčekov je teraz 11. To znamená, že Peťo musí prefarbiť 11-5=6 štvorčekov a to napríklad takto:



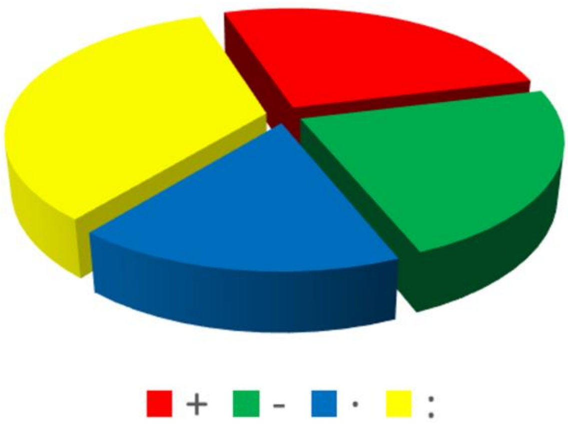
Úloha 03. Optimizmus

Lukáš si vymyslel optimistické čísla. Optimistické číslo je také číslo, ktorého cifry zľava doprava narastajú. Napríklad čísla 1489, 789 a 3 sú optimistické, ale čísla 55 a 1492 nie. Aké je najväčšie optimistické číslo?

Výsledok: 123456789
Riešenie: Aby bolo číslo čo najväčšie, chceme v ňom použiť čo najviac cifier. Cifru 0 zjavne použiť nemôžeme, lebo by ňou muselo číslo začínať. Použijeme preto iba cifry od 1 do 9. Je len jeden spôsob, ako ich usporiadať do čísla, ktorého cifry budú narastať zľava doprava. Preto je najväčším optimistickým číslom číslo 123456789.

Úloha 04. Obľúbené znamienko

V krajine Attomatovo prebehli voľby o najobľúbenejšie znamienko. Výsledky volieb boli zverejnené pomocou grafu na obrázku. Ktoré znamienko získalo najviac hlasov, a tak sa stalo najobľúbenejším znamienkom v krajine Attomatovo?

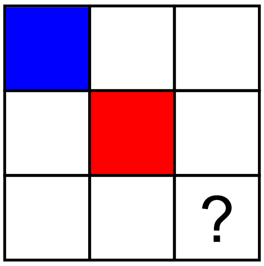


a) + *b) –* *c) ·* *d) :*

Výsledok: d) :
Riešenie: Čím viac hlasov nejaké znamienko dostalo, tým väčšiu časť má v grafe. Víťazom sa tak muselo stať to znamienko, ktorému patrí v grafe najväčšia časť. Najväčšia časť grafu je žltá, ktorá zodpovedá hlasom pre znamienko delenia. Znamienko d) : je preto najobľúbenejším znamienkom v krajine Attomatovo.

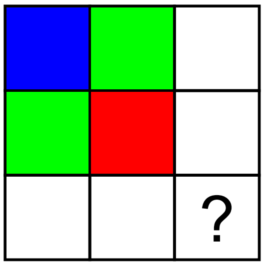
Úloha 05. RGB štvorčeky

Laura si nakreslila tabuľku 3×3. Začala jej štvorčeky vyfarbovať červenou, modrou a zelenou farbou. Niektoré štvorčeky už vyfarbila tak, ako vidíš na obrázku. Zvyšné štvorčeky chce vyfarbiť tak, aby každá trojica štvorčekov, ktoré ležia v jednom riadku alebo v jednom stĺpci, obsahovala štvorček každej z týchto troch farieb. Akú farbu bude mať štvorček s otáznikom?

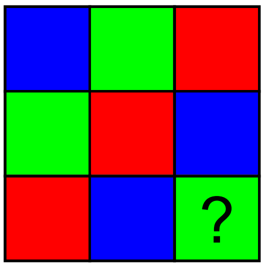


a) červenú *b) zelenú* *c) modrú* *d) nedá sa určiť*

Výsledok: b) zelenú
Riešenie: Pozrime sa najprv na štvorčeky, ktoré susedia s už vyfarbenými štvorčekmi. Oba sa nachádzajú v riadku alebo stĺpci s modrým a červeným štvorčekom. Takže musia byť zelené. Dostávame vyfarbenie ako na tomto obrázku:



Ďalej vieme už jednoznačne dopĺňať tretiu chýbajúcu farbu v riadkoch a stĺpcoch, kým sa nedopracujeme k takejto tabuľke:



Štvorček s otáznikom tak musí mať b) zelenú farbu.

Úloha 06. Čítanie myšlienok

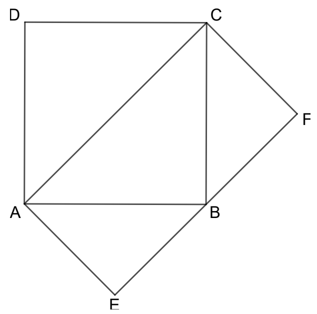
Katka s Miškou majú 5 guľôčok. Očíslovali ich číslami 1 až 5 a dali ich do nepriehľadného vrecúška. Potom si Katka vytiahla dve z guľôčok a Miška jednu zo zvyšných guľôčok. Keď si Katka pozrela čísla na guľôčkach, ktoré vytiahla, zahlásila: „Určite si si vytiahla guľôčku s nepárnym číslom.“ Aký je súčet čísel na guľôčkach, ktoré si vytiahla Katka?

Výsledok: 6
Riešenie: Aby mohla Katka s istotu povedať vetu „Určite si si vytiahla guľôčku s nepárnym číslom,“ musela mať istotu, že vo vrecúšku neboli po jej ťahaní žiadne guľôčky s párnymi číslami. Takže všetky takéto guľôčky si musela vytiahnuť Katka. Katka si vytiahla len dve guľôčky, no guľôčky s párnym číslom sú tiež len dve - s číslami 2 a 4. Takže Katka si musela vytiahnuť zrovna tieto dve guľôčky. Preto je súčet čísel na guľôčkach, ktoré si Katka vytiahla, rovný 2+4=6.

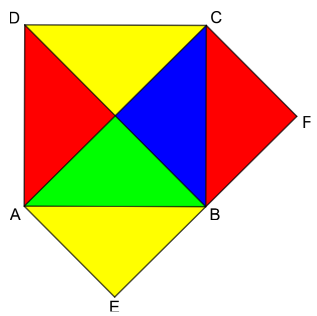
Úloha 07. Maľovanie

Aďka si nakreslila štvorec ABCD. K nemu si prikreslila obdĺžnik AEFC tak, že bod B ležal na úsečke EF. Keby chcela celý štvorec ABCD zafarbiť namodro, použila by 100 gramov farby. Koľko gramov farby by použila, ak by chcela namodro zafarbiť obdĺžnik AEFC?

Výsledok: 100
Riešenie: Nakreslime si k zadaniu obrázok:



Rozdeľme si štvorec ABCD na niekoľko trojuholníkov ako na tomto obrázku:



Vidíme, že aj štvorec ABCD, aj obdĺžnik AEFC majú spoločný zelený a modrý trojuholník. Zároveň vieme presunúť červený a žltý trojuholník zo štvorca ABCD do obdĺžnika AEFC tak, aby bol celý obdĺžnik AEFC pokrytý farebnými trojuholníkmi. Preto treba na zafarbenie obdĺžnika AEFC rovnako veľa farby ako na zafarbenie štvorca ABCD, takže Aďka potrebuje 100 gramov farby.

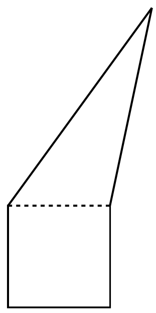
Úloha 08. Láska k číslam

Ľudke sa páčia iba také čísla, ktoré sa dajú zapísať ako súčin dvoch rovnakých prirodzených čísel. Napríklad číslo 81 sa Ľudke páči, lebo sa dá zapísať ako 81=9·9. Ktoré z týchto čísel sa Ľudke nepáči?
a) 169 *b) 196* *c) 225* *d) 252*

Výsledok: d) 252
Riešenie: Čísla 169, 196 a 225 sa Ľudke určite páčia, pretože 169=13·13, 196=14·14 a 225=15·15. Číslo 252 ale leží medzi číslami 225=15·15 a 256=16·16, takže neexistuje žiadne prirodzené číslo, ktoré by sme mohli vynásobiť sebou samým a dostali by sme číslo 252. Preto sa Ľudke nepáči číslo d) 252.

Úloha 09. Krájanie päťuholníka

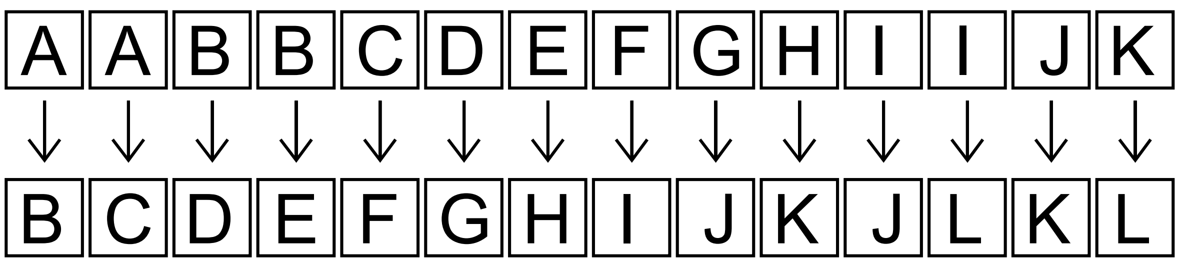
Patrik si nakreslil päťuholník. Ten sa dal rozdeliť na štvorec a trojuholník tak, ako vidíš na obrázku. Navyše mal štvorec stranu dlhú 5 cm. Patrika prekvapilo, keď zistil, že štvorec má rovnaký obvod ako trojuholník. Koľko centimetrov meral obvod Patrikovho päťuholníka?



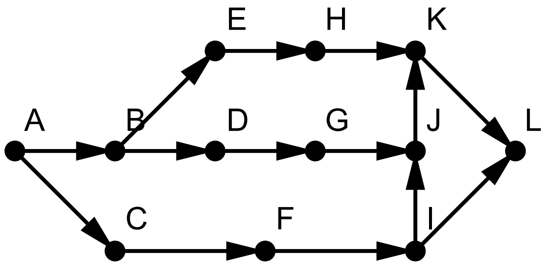
Výsledok: 30
Riešenie: Štvorec má stranu dlhú 5 cm, takže jeho obvod je 5+5+5+5=20 cm. Trojuholník má podľa zadania rovnaký obvod, a preto má tiež obvod 20 cm. Štvorec a trojuholník majú ale jednu stranu dlhú 5 cm spoločnú. Preto na obvode päťuholníka leží z každého z týchto útvarov 20-5=15 cm. Keďže toto sú jediné dĺžky na obvode a štvorec s trojuholníkom sa už nikde neprekrývajú, musí byť obvod päťuholníka 15+15=30 cm.

Úloha 10. Chrám skazy

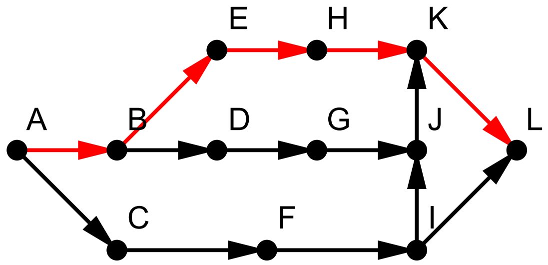
Indiana Jones sa ocitol v labyrinte. Labyrint je tvorený miestnosťami A až L. Medzi nimi vedú iba jednosmerné cesty. Možné cesty vidíš na obrázku, teda napríklad z miestnosti A sa Indiana Jones vie dostať do miestností B a C. Indiana Jones sa nachádza v miestnosti A. Koľkými rôznymi cestami sa môže dostať až do miestnosti L?

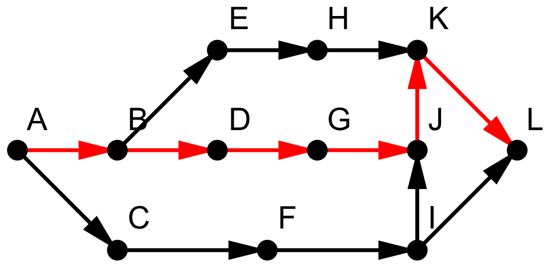


Výsledok: 4
Riešenie: Nakreslime si takýto plán, ktorý zachytáva, odkiaľ kam sa vie Indiana Jones dostať:

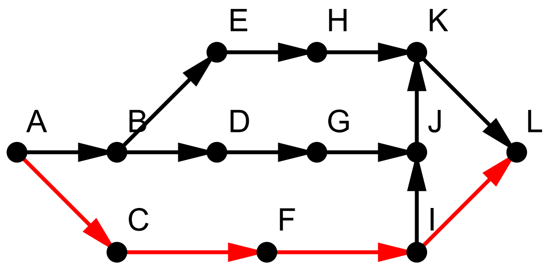


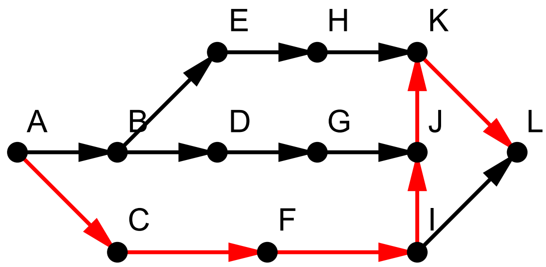
Hneď v miestnosti A sa Indiana Jones môže rozhodnúť pre dve možnosti.
Ak sa rozhodne ísť cez miestnosť B, tak znova dostane na výber z dvoch možností. V oboch prípadoch ale bude už jeho cesta do miestnosti L jednoznačne určená. V tomto prípade tak dostávame tieto dve možnosti cesty do miestnosti L:





Ak sa rozhodne ísť cez miestnosť C, tak musí prejsť až do miestnosti I, kde opäť dostane na výber z dvoch možností. Po tomto výbere už ale bude jeho cesta do miestnosti L jednoznačná. Preto bude mať Indiana Jones v tomto prípade tieto dve možnosti:





Tým sme vyčerpali všetky možnosti, ako môže Indiana Jones opustiť miestnosť A. Spolu tak má Indiana Jones 2+2=4 cesty, ako sa dostať z miestnosti A do miestnosti L.

Úloha 11. Zaokrúhľovanie

Marcel a Sabinka si vybrali celé číslo a napísali ho na papier. Marcel ho zaokrúhlil na tisícky a dostal tak číslo o 366 väčšie, než bolo ich pôvodné číslo. Sabinka sa rozhodla zaokrúhliť číslo na papieri na stovky. O koľko sa zmenilo číslo na papieri po jej zaokrúhlení?

Výsledok: 34
Riešenie: Keďže sa číslo zväčšilo o 366, zaokrúhľovalo sa nahor, a tak sa cifra na mieste tisícok zväčšila o 1. Posledné tri cifry čísla, ktoré si Marcel a Sabinka vybrali, sú preto 1000-366=634. Po zaokrúhlení na stovky sa tak tieto cifry zmenia na 600. Takže číslo sa zmenší o 634-600=34.

Úloha 12. Krátka

Poštár Pat roznáša poštu na Krátkej ulici, ktorá ide zo západu na východ. Na severnej strane ulice sú domy očíslované nepárnymi číslami od jednotky (teda 1, 3, 5 a tak ďalej) a na južnej strane párnymi číslami od dvojky (teda 2, 4, 6 a tak ďalej). Na oboch stranách ulice je rovnaký počet domov. Keď Pat roznášal poštu po severnej strane ulice, napočítal v číslach domov 4-krát cifru 2. Koľkokrát napočíta cifru 2, keď sa bude vracať južnou stranou ulice?

Výsledok: 8
Riešenie: Na severnej strane ulice si Pat započíta cifru dva pri číslach 21, 23, 25 a 27 - žiadne nepárne čísla domov menšie ako tieto neobsahujú cifru 2. Číslo domu 29 sa ale už na ulici nenachádza, lebo by si Pat pri ňom započítal ďalšiu dvojku. Čísla domov na druhej strane tak končia číslom domu 28. Pat preto započíta dvojku v číslach domov 2, 12, 20, 24, 26, 28 a dvakrát v čísle 22. Spolu preto na južnej strane napočíta cifru 2 presne 8-krát.

Úloha 13. Mašinka - hovorca

Majo dostal na Vianoce čarovnú hovoriacu mašinku. Dajú sa do nej vložiť dve kartičky s číslami, pekne jedna po druhej. Následne mašinka zahlási nejaké číslo. Majo si všimol, že keď k číslu, ktoré zahlási mašinka, pripočíta číslo z druhej vloženej kartičky, dostane 6-násobok čísla na prvej vloženej kartičke. Takže ak Majo vloží napríklad kartičky s číslami 3 a 2, tak mašinka zahlási číslo 16. Teraz si želá, aby mašinka zahlásila číslo 7, pretože je jeho obľúbené číslo. Vložil preto kartičku s číslom 7 ako prvú. Akú kartičku má vložiť ako druhú, aby mu mašinka splnila jeho želanie?

Výsledok: 35
Riešenie: Keď sčítame číslo 7 a číslo na druhej kartičke, má nám vyjsť 6-násobok čísla 7, teda číslo $6\cdot7=42$. Do mašinky tak musíme vložiť kartičku s číslom $42-7=35$.

Úloha 14. Jazyky sveta

Na vedeckú konferenciu prišlo 60 vedcov. Každý z nich ovláda aspoň jeden z jazykov angličtina a čínština. Angličtinou hovoria dve tretiny všetkých vedcov na konferencii, kým čínštinou len polovica. Koľko z vedcov na konferencii rozpráva aj po anglicky a aj po čínsky?

Výsledok: 10
Riešenie: Jedna tretina všetkých vedcov je $60:3=20$ vedcov, takže dve tretiny sú $2\cdot20=40$ vedcov. Angličtinou preto hovorí 40 vedcov. Polovica všetkých vedcov je $60:2=30$ vedcov, takže 30 vedcov hovorí čínštinou. Ak by sme začali „prideľovať“ tieto jazyky vedcom, museli by sme nejaký jazyk „prideliť“ $40+30=70$-krát. Každému vedcovi musíme „prideliť“ aspoň jeden jazyk. Ak by sme každému vedcovi „pridelili“ iba jeden jazyk, zostalo by nám na „pridelenie“ ešte $70-60=10$ jazykov. Tieto jazyky tak musíme „prideliť“ takým spôsobom, že zakaždým vznikne vedec, ktorý rozpráva oboma jazykmi. Preto musí byť na konferencii 10 vedcov, ktorí rozprávajú po anglicky aj po čínsky.

Úloha 15. Násobky štyridsaťsedem

Jonášovo obľúbené číslo je najmenšie také prirodzené číslo, že keď ho pripočítame k číslu 2020, tak dostaneme násobok 47. Na druhej strane Miškino obľúbené číslo je najmenšie také prirodzené číslo, že keď ho odpočítame od čísla 2020, tak dostaneme násobok 47. Aký je súčet Jonášovho a Miškinho obľúbeného čísla?

Výsledok: 47
Riešenie: Keď vydelíme číslo 2020 číslom 47 vidíme, že 2020 nie je násobkom čísla 47. Číslo 2020 tak leží medzi nejakými dvomi po sebe idúcimi násobkami čísla 47. Ak si tieto tri čísla predstavíme na číselnej osi, tak vzdialenosť medzi väčším násobkom 47 a číslom 2020 je Jonášovým obľúbeným číslom a vzdialenosť medzi menším násobkom 47 a číslom 2020 je zas Miškiným obľúbeným číslom. Súčet Jonášovho a Miškinho obľúbeného čísla tak predstavuje vzdialenosť medzi týmito násobkami 47. Keďže sú to ale dva po sebe idúce násobky 47, tak aj ich vzdialenosť je 47. Súčet Jonášovho a Miškinho obľúbeného čísla je preto 47.

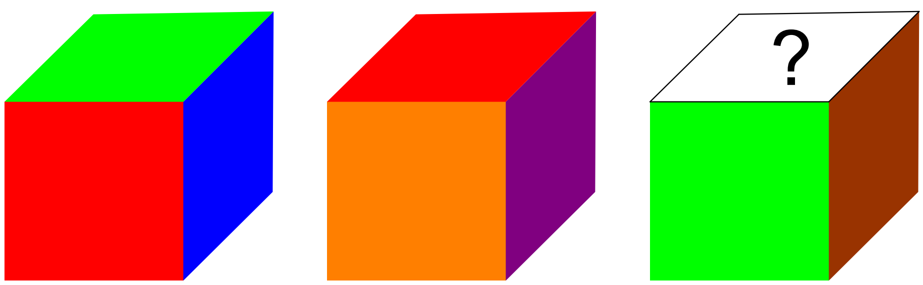
Úloha 16. Krátky súčet

Maťo si napísal aspoň dve po sebe idúce prirodzené čísla a všetky ich sčítal. Dostal tak súčet 54. Koľko najmenej čísel mohol sčítať?

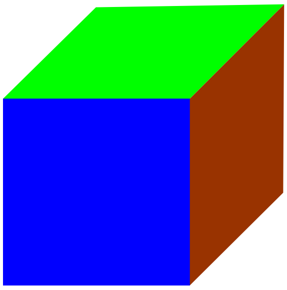
Výsledok: 3
Riešenie: Skúsme, či mohol Maťo sčítať iba dve čísla. To sa ale nedá, pretože jedno zo sčítavaných čísel musí byť párne a druhé nepárne. Takže súčet musí byť nepárny, lenže 54 je párne číslo. Takže Maťo určite nesčítal iba dve čísla.
Skúsme teda, či mohol sčítať tri čísla. V takom prípade musí byť prostredné z týchto čísel rovné ich priemeru, teda číslu 54:3=18. Keď k nemu pridáme jeho dvoch „susedov“, čísla 17 a 19, dostaneme vyhovujúcu trojicu čísel 17, 18, 19 so súčtom 17+18+19=54.
Tým sme ukázali, že Maťo mohol sčítať 3 čísla a menej nie, takže mohol sčítať najmenej 3 čísla.

Úloha 17. Si kocka, si kocka, si kocka...

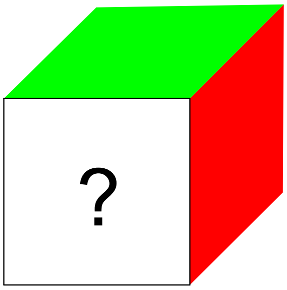
Kubo ofarbil steny kocky. Každá stena je nafarbená jednou farbou. Potom Kubo nafotil tri fotky tejto kocky, ale zakaždým kocku trochu pootočil. Akou farbou je nafarbená stena označená otáznikom?



Výsledok: oranžovou
Riešenie: Z obrázkov vidíme, že červená stena susedí so zelenou, modrou, oranžovou aj fialovou stenou. Preto musia červená a hnedá stena ležať oproti sebe. Otočme prvú kocku tak, aby sa červená skryla naľavo. Keďže oproti červenej je hnedá, tak uvidíme takúto kocku:



Ak túto kocku ešte pretočíme tak, aby bola zelená stena vpredu, tak sa dostaneme do stavu ako na tretej kocke, pričom vieme, že teraz kocka stojí na modrej stene. Takže stena označená otáznikom je tá, ktorá je naproti modrej stene.
Vráťme sa k pôvodnej prvej kocke a otočme ju tak, aby sa červená stena dostala na pravú stenu. Horná stena týmto zostane zelená. Navyše sa modrá stena dostane dozadu, a preto bude predná stena tá oproti modrej stene, o ktorej sme si už povedali, že je tá s otáznikom. Uvidíme preto takúto kocku:



Ak teraz otočíme kocku tak, aby sa červená dostala na vrchnú stenu, tak neuvidíme ani modrú, ktorá je stále vzadu, ani zelenú, ktorá sa dostane doľava. Zároveň nevidíme hnedú, ktorá je na spodku, lebo je oproti červenej. Preto musíme vidieť iba červenú, fialovú a oranžovú. Tým pádom musíme vidieť stav ako na druhej kocke. Lenže stena s otáznikom sa pri poslednom otočení nepohla a je teda stále vpredu. Na druhej kocke je ale vpredu oranžová.
Takže stena označená otáznikom musí byť oranžová.

Úloha 18. Tatranská lanovka

Katka išla na výlet do Tatier. Ako sa viezla lanovkou zo Štrbského plesa na Chatu pod Soliskom, počítala, koľko sedačiek išlo oproti nej. Za celú jazdu ich napočítala 179. Koľko minút Katke trvala jazda lanovkou, ak zo stanice lanovky vyjde sedačka každých 8 sekúnd?

Výsledok: 12
Riešenie: Počas jazdy lanovkou musela Katka započítať práve raz každú sedačku okrem tej, na ktorej sa viezla. Na lanovke tak musí byť 179+1=180 sedačiek. Aby mohla zo stanice lanovky vychádzať jedna sedačka každých 8 sekúnd, musí sa jedna sedačka otočiť v druhej stanici a prísť naspäť za 180·8=1440 sekúnd. Katka sa ale viezla len polovicu z tohto času, lebo išla len z jednej stanice do druhej. To znamená, že sa musela viezť 1440:2=720 sekúnd. Katke tak trvala jazda lanovkou 720:60=12 minút.

Úloha 19. Uhlopriečka

Majo si nakreslil štvoruholník ABCD. Strany tohto štvoruholníka majú dĺžky |AB|=5 cm, |BC|=17 cm, |CD|=5 cm a |DA|=9 cm. Navyše je dĺžka uhlopriečky BD vyjadrená v centimetroch celým číslom. Koľko centimetrov meria uhlopriečka BD?

Výsledok: 13
Riešenie: Z trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku BCD vyplýva, že súčet dĺžok úsečiek BD a CD musí byť väčší ako dĺžka úsečky BC. Preto musí byť dĺžka úsečky BD väčšia ako 17-5=12 cm. Z trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku ABD zas máme, že dĺžka úsečky BD musí byť menšia ako súčet dĺžok úsečiek AB a AD. Dĺžka úsečky BD tak musí byť menšia ako 5+9=14 cm. Jediné celé číslo, ktoré je súčasne väčšie ako 12 a menšie ako 14, je číslo 13, čiže dĺžka úsečky BD musí byť 13 cm.

Úloha 20. Rad jednotiek a dvojok

Erik zapisuje čísla ako súčet jednotiek a dvojok. Záleží mu na tom, v akom poradí ich sčituje. Číslo 3 tak vie zapísať tromi spôsobmi ako 1+1+1, 1+2 alebo 2+1. Koľkými spôsobmi vie zapísať číslo 15?

Výsledok: 987
Riešenie: Pozrime sa, čo sa deje, ak sa zápis čísla 15 začína jednotkou, a čo sa deje, ak sa začína dvojkou. Ak sa začína jednotkou, tak zvyšok zápisu tvoria jednotky a dvojky so súčtom 15-1=14. Na to je toľko možností, ako zapísať číslo 14 pomocou jednotiek a dvojok. Ak sa začína dvojkou, tak zvyšok zápisu tvoria jednotky a dvojky so súčtom 15-2=13. Na to máme toľko možností, ako zapísať číslo 13 pomocou jednotiek a dvojok. Počet spôsobov, ako zapísať číslo 15 pomocou jednotiek a dvojok, sa tak rovná súčtu počtu spôsobov, ako zapísať číslo 14 a ako zapísať číslo 13. Toto platí aj všeobecne - počet možností pre ľubovoľné číslo sa rovná súčtu počtu spôsobov pre čísla o jedna a o dva menšie. Vďaka tomuto vieme počty spôsobov jednoducho počítať od malých čísel:

Pre číslo 1 máme 1 spôsob zápisu.
Pre číslo 2 máme 2 spôsoby zápisu.
Pre číslo 3 máme 1+2=3 spôsoby zápisu.
Pre číslo 4 máme 2+3=5 spôsobov zápisu.
Pre číslo 5 máme 3+5=8 spôsobov zápisu.
Pre číslo 6 máme 5+8=13 spôsobov zápisu.
Pre číslo 7 máme 8+13=21 spôsobov zápisu.
Pre číslo 8 máme 13+21=34 spôsobov zápisu.
Pre číslo 9 máme 21+34=55 spôsobov zápisu.
Pre číslo 10 máme 34+55=89 spôsobov zápisu.
Pre číslo 11 máme 55+89=144 spôsobov zápisu.
Pre číslo 12 máme 89+144=233 spôsobov zápisu.
Pre číslo 13 máme 144+233=377 spôsobov zápisu.
Pre číslo 14 máme 233+377=610 spôsobov zápisu.
Pre číslo 15 máme 377+610=987 spôsobov zápisu.

Preto vie Erik zapísať číslo 15 presne 987 spôsobmi.