Matboj – Attomat

27.11.2020

Vzorové riešenia

Kategórie 7, 8, 9, Sekunda, Tercia, Kvarta, Open

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

Úloha 01. Mladí umelci

Na krúžok maľovania chodí 24 žiakov. Dievčat pritom chodí o 12 viac ako chlapcov. Koľkokrát viac dievčat ako chlapcov chodí na krúžok maľovania?

Výsledok: 3
Riešenie: Keby sme na chvíľu zabudli na 12 dievčat, tak by na krúžok chodilo rovnako dievčat ako chlapcov. Po zabudnutí 12 dievčat by na krúžok chodilo 24 - 12 = 12 žiakov, a teda 12 : 2 = 6 dievčat a 6 chlapcov. Keď si teraz spomenieme na 12 zabudnutých dievčat, zistíme, že na krúžok musí chodiť 6 + 12 = 18 dievčat. Na krúžok maľovania preto chodí 18 : 6 = 3-krát viac dievčat ako chlapcov.

Úloha 02. Najväčšia láska

Matej sa zamiloval. Zamiloval sa do čísel, ktoré majú takúto vlastnosť: keď vynásobí cifry tohto čísla a k výsledku pričíta každú cifru pôvodného čísla, tak dostane naspäť pôvodné číslo. Napríklad sa Matej zamiloval do čísla 19, pretože 1 · 9 + 1 + 9 = 19. Do ktorého z týchto čísel sa ešte Matej zamiloval?

a) 48 *b) 56* *c) 91* *d) 99*

Výsledok: d) 99
Riešenie: Po jednom prejdime jednotlivé čísla. Keď vynásobíme jednotlivé cifry týchto čísel a pripočítame každú cifru, tak dostaneme:
a) 4 · 8 + 4 + 8 = 32 + 4 + 8 = 44
b) 5 · 6 + 5 + 6 = 30 + 5 + 6 = 41
c) 9 · 1 + 9 + 1 = 9 + 9 + 1 = 19
d) 9 · 9 + 9 + 9 = 81 + 9 + 9 = 99
Vidíme, že jediná možnosť, kde sme dostali naspäť pôvodné číslo, je možnosť d). Takže Matej sa zamiloval aj do čísla d) 99.

Úloha 03. Zo srdca

Katka si na tabuľu napísala 1 ♥ 2 ♥ 1 ♥ 2 ♥ 1 ♥ 2. Katka nahradí každé srdiečko niektorým zo znamienok plus, mínus alebo krát. Všetky srdiečka nahradí tým istým znamienkom. Potom vypočíta hodnotu výrazu, ktorý dostala. Pre ktoré zo znamienok nadobudne výraz najväčšiu hodnotu?

a) +
b) -
c) ·
d) viac odpovedí je správnych

Výsledok: a) +
Riešenie: Pozrime sa, aký výsledok dostaneme v jednotlivých prípadoch:
a) 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 9
b) 1 - 2 - 1 - 2 - 1 - 2 = -7
c) 1 · 2 · 1 · 2 · 1 · 2 = 8
Vidíme, že najväčšiu hodnotu výrazu dostaneme, ak použijeme znamienko a) +.

Úloha 04. Štedrosť

Dávid dostal čokoládu, ktorá pozostávala z 35 kúskov. Dávid ale neje čokoládu, keďže drží diétu. Preto sa rozhodol rozdeliť čokoládu medzi kamarátov. Chce, aby každý dostal aspoň 2 kúsky čokolády a aby každý dostal rovnaký počet kúskov čokolády. Zároveň ale chce, aby žiadny kúsok nezostal. Najviac koľkým kamarátom môže Dávid rozdeliť čokoládu?

Výsledok: 7
Riešenie: Aby Dávid rozdelil čokoládu medzi čo najväčší počet kamarátov, musel každý kamarát dostať čo najmenej kúskov čokolády. Pritom ale museli všetci dostať rovnako veľa kúskov. Prvočíselný rozklad čísla 35 je $35 = 5 \cdot 7$. Aby každý dostal rovnako veľa kúskov čokolády, musel každý dostať aspoň 5 kúskov čokolády. V tom prípade by Dávid rozdelil čokoládu siedmim kamarátom. Takže Dávid mohol rozdeliť čokoládu najviac 7 kamarátom.

Úloha 05. Štvorčeky

Paťo si nakreslil štvorčeky ako na obrázku. Chce do každého z nich napísať jedno číslo. Dve čísla už doplnil. Zvyšné čísla chce doplniť tak, aby súčet čísel v každých troch po sebe idúcich štvorčekoch bol 12. Aký bude súčet čísel v prvom a poslednom štvorčeku?

			1		4		

Výsledok: 8
Riešenie: Na políčko medzi jednotku a štvorku musíme doplniť číslo 12 - 1 - 4 = 7:

			1	7	4		

Podobným spôsobom vieme postupne dopĺňať aj čísla do štvorčekov naľavo od týchto troch aj napravo od týchto troch. Tým sa dopracujeme k takémuto vyplneniu štvorčekov:

1	7	4	1	7	4	1	7

Súčet čísel v prvom a poslednom štvorčeku je preto 1 + 7 = 8.

Úloha 06. O dvoch bratoch

Dvaja bratia, Šimon a Mirko, sa hrali s číslami, ktoré označovali ich vek. Keď ich vynásobili, dostali číslo 150. Keď ich sčítali, dostali číslo 25. O koľko rokov je starší brat Šimon starší od Mirka?

Výsledok: 5
Riešenie: Číslo 150 vieme zapísať ako súčin dvoch kladných celých čísel šiestimi spôsobmi:
$150 = 1 \cdot 150$
$150 = 2 \cdot 75$
$150 = 3 \cdot 50$
$150 = 5 \cdot 30$
$150 = 6 \cdot 25$
$150 = 10 \cdot 15$
Jediná dvojica činiteľov, ktorej súčet je 25, je dvojica 10 a 15. Starší brat Šimon preto musí byť o $15 - 10 = 5$ rokov starší ako Mirko.

Úloha 07. Fruit ninja

Max si do mobilu stiahol hru ovocný ninja, v ktorej seká ovocie. Minule v hre rozsekol mango pomocou troch sekov. Na koľko najviac častí sa mango mohlo rozpadnúť?

Výsledok: 8
Riešenie: Každým seknutím môže Max rozdeliť každú časť manga na dve časti. Po prvom seknutí tak bude mať najviac $2 \cdot 1 = 2$ časti manga, po druhom najviac $2 \cdot 2 = 4$ kusy manga a po treťom najviac $2 \cdot 4 = 8$ kusov manga. Takže mango sa mohlo po troch seknutiach rozpadnúť na najviac 8 častí.

Úloha 08. Ručné práce

Lukáš vyrezáva ozdoby z dreva. Keď vyrezáva ozdoby tri hodiny, tak sa mu podarí vyrezať o 42 ozdôb viac, ako keď vyrezáva len hodinu. Koľko ozdôb vyreže Lukáš za jednu hodinu?

Výsledok: 21
Riešenie: Keď Lukáš vyrezáva o 2 hodiny dlhšie, vyreže o 42 ozdôb viac. Preto Lukáš vyreže za jednu hodinu $42 : 2 = 21$ ozdôb.

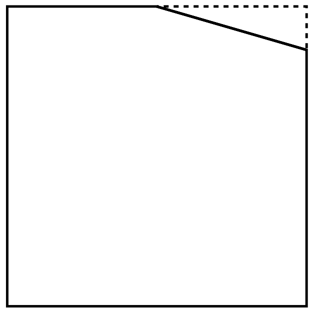
Úloha 09. Zápalkový hlavolam

Zajo má na kôpke 21 zápaliek rovnakej dĺžky. Skladá z nich štvorce tak, že na každú stranu štvorca vždy využije niekoľko (aspoň jednu) celých zápaliek. Robí to tak, aby každá zápalka ležala na obvode tohto štvorca. Nemusí pri tom použiť všetky zápalky. Keď Zajo poskladá štvorec, odfotí si ho a vráti zápalky naspäť na kôpku. Koľko najviac rôznych štvorcov môže mať Zajo na fotkách?

Výsledok: 5
Riešenie: Aby Zajo dostal štvorec, musí dostať útvar so štyrmi stranami, ktorý bude na každej strane zložený z rovnakého počtu zápaliek. Z toho vyplýva, že počet zápaliek tvoriacich štvorec musí byť násobkom 4. Násobky 4 menšie ako 21 sú 4, 8, 12, 16 a 20. Zajo preto môže mať na fotkách 5 rôznych štvorcov.

Úloha 10. Predaný pozemok

Farmárka Kika mala záhradu na štvorcovom pozemku so stranou dlhou 50 m. Jedného dňa predala susedovi časť svojho pozemku, ktorá bola v rohu tohto štvorca. Táto časť mala tvar trojuholníka so stranami dlhými 7 m, 24 m a 25 m. Potom sa rozhodla oplotiť celý svoj pozemok. Koľko metrov pletiva na to potrebovala?



Výsledok: 194
Riešenie: Keby sa Kika rozhodla oplotiť svoj pôvodný pozemok, potrebovala by na to $4 \cdot 50$ m = 200 m pletiva. Po predaji pozemku v rohu ale už na obvode pozemku nie sú úseky s dĺžkou 7 m a 24 m. Nahradil ich úsek s dĺžkou 25 m. Obvod pozemku sa tak zmenšil o 7 m + 24 m - 25 m = 6 m. Na oplotenie pozemku po predaji tak Kika potrebuje 200 m - 6 m = 194 m pletiva.

Úloha 11. Exkurzia

Na školský výlet išlo niekoľko žiakov. Mohlo ich byť najviac 52, pretože toľko miest mal autobus, ktorý objednali. Na výlet išlo určite aspoň 20 chlapcov a aspoň 25 dievčat. Ktoré z týchto tvrdení sú pravdivé?

a) Na výlet určite išlo menej ako 29 chlapcov.
b) Mohlo sa stať, že na výlet išlo 32 dievčat.
c) Na výlet určite išlo viac ako 45 detí.
d) Na výlet určite išlo viac dievčat ako chlapcov.
Poznámka: Pozor, viac odpovedí môže byť správnych!

Výsledok: a), b)
Riešenie: Prejdime postupne jednotlivé tvrdenia:
a) Na výlet išlo aspoň 25 dievčat, no všetkých bolo najviac 52. To znamená, že chlapcov bolo najviac 52 - 25 = 27. Teda na výlet určite išlo menej ako 29 chlapcov. Preto je tvrdenie a) pravdivé.
b) Ak by na výlet išlo 32 dievčat a 20 chlapcov, splnili by sme všetky podmienky. Situácia z tvrdenia b) tak mohla nastať, a teda tvrdenie b) je pravdivé.
c) Na výlet mohlo ísť presne 20 chlapcov a presne 25 dievčat, spolu 20 + 25 = 45 detí. Takže na výlet nemuselo ísť viac ako 45 detí, mohlo ich byť aj presne 45. To znamená, že tvrdenie c) je nepravdivé.
d) Mohlo sa stať, že by na výlet išlo 27 chlapcov a 25 dievčat. V takom prípade by na výlet išlo viac chlapcov ako dievčat. Preto je tvrdenie d) nepravdivé.
Spolu tak dostávame, že pravdivé sú tvrdenia a) a b).

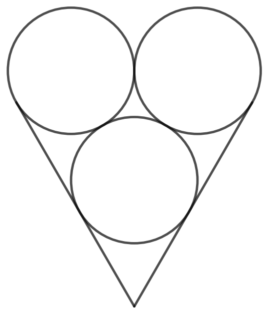
Úloha 12. 50 čísel

Terka si píše postupnosť čísel. Ako prvé si napísala číslo 47. Každé ďalšie číslo dostane tak, že predošlé číslo v postupnosti sčíta so svojou prvou cifrou. Druhé číslo, ktoré Terka napíše, tak bude 47 + 4 = 51. Ktoré číslo napíše Terka ako päťdesiate?

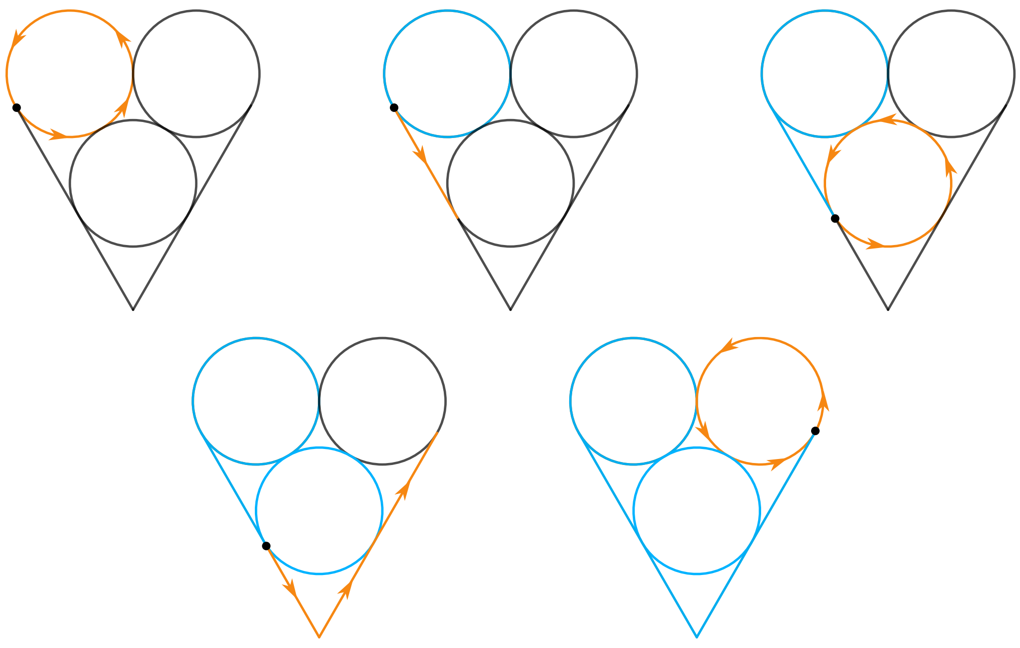
Výsledok: 145
Riešenie: Vypíšme si zopár prvých čísel:
47, 51, 56, 61, 67, 73, 80, 88, 96, 105,...
Všimnime si, že sme sa dostali na číslo, ktoré začína jednotkou. Od tohto momentu budeme už len pripočítavať jednotku. Toto by sa totiž zmenilo až o veľa pripočítaní jednotky neskôr, kedy by sme sa dostali na číslo 200. Keďže zostáva do postupnosti napísať ešte 40 čísel, tak päťdesiate číslo v postupnosti musí byť 105 + 40 = 145.

Úloha 13. Chuť na zmrzlinu

Janka si kreslí obrázky. Kreslí ich tak, že pri kreslení nezdvihne ceruzku z papiera a ani neprejde po tej istej čiare dvakrát. Môže Janka nakresliť takýto obrázok zmrzliny v kornútku?



Výsledok: áno
Riešenie: Áno, tento obrázok sa dá nakresliť jedným ťahom. Dá sa to napríklad takto:



Úloha 14. Temno

Sergej má v tmavej zásuvke modré a oranžové ponožky. Keď dnes ráno po jednej vyťahoval ponožky, tak zistil nasledovné veci. Na to, aby určite vytiahol dve modré ponožky, musel vytiahnuť najmenej 17 ponožiek. Na to, aby určite vytiahol dve oranžové ponožky, musel vytiahnuť aspoň 22 ponožiek. Koľko ponožiek má Sergej v zásuvke?

Výsledok: 35
Riešenie: Na to, aby Sergej určite vytiahol aspoň dve modré ponožky, musel vytiahnuť všetky oranžové ponožky a dve modré ponožky k tomu. V zásuvke tak musí byť 17 - 2 = 15 oranžových ponožiek. Zopakovaním tejto myšlienky pri výbere oranžových ponožiek dostaneme, že v zásuvke musí byť 22 - 2 = 20 modrých ponožiek. Sergej tak má v zásuvke 15 + 20 = 35 ponožiek.

Úloha 15. Krúžkovanie

Peťo si na tabuľu napísal čísla: 15, 26, 11, 18, 33, 27, 10, 21 a 2. Potom niektoré z nich zakrúžkoval. Následne na tabuľu napísal najväčší spoločný deliteľ všetkých zakrúžkovaných čísel a zistil, že je väčší ako 1. Koľko najviac čísel mohol Peťo zakrúžkovať?

a) 3 *b) 4* *c) 5* *d) 6*

Výsledok: c) 5
Riešenie: Všimnime si, že ak by bol najväčší spoločný deliteľ zakrúžkovaných čísel rovný 3, tak by Peťo mohol zakrúžkovať všetky násobky čísla 3. Peťo by tak mohol zakrúžkovať čísla 15, 18, 33, 27 a 21, spolu 5 čísel. Ukážeme, že viac čísel Peťo zakrúžkovať nemohol. Ak by bol najväčší spoločný deliteľ zakrúžkovaných čísel aspoň 7, tak aby mohol Peťo zakrúžkovať aspoň 5 čísel, muselo by byť na tabuli číslo s hodnotou aspoň $5 \cdot 7 = 35$. Ale najväčšie číslo na tabuli je číslo 33. Zostáva tak už len ručne skontrolovať, či pre najväčší spoločný deliteľ 2, 4, 5 alebo 6 Peťo nezakrúžkuje viac čísel. Ľahko ale overíme, že pre ne mohol Peťo zakrúžkovať vždy len menej ako 5 čísel.
Takže Peťo mohol zakrúžkovať najviac c) 5 čísel.

Úloha 16. Vojenská prehliadka

*Kubko a Maťko sa hrajú s plastovými vojačikmi. Kubko povedal Maťkovi: "Ulož vojačikov do *** radov tak, aby v každom rade boli viac ako dvaja vojačikovia a aby v každom rade bolo rovnako veľa vojačikov." Najdôležitejšiu informáciu o počte radov ale Maťko zabudol hneď, ako ju počul. Pamätal si len, že rady mali byť viac ako dva. Kubko si vtom ale uvedomil, že sa to Maťkovi nemôže podariť, a tak mu povedal, že ak použije najviac vojačikov, ako môže, tak jeden vojačik mu zostane. Ktoré z týchto čísel nemôže označovať počet vojačikov, s ktorými sa Kubko a Maťko hrajú?*

a) 43 *b) 53* *c) 63* *d) 73*

Výsledok: c) 63
Riešenie: Keďže jeden vojačik má zostať, tak sa pozerajme na čísla z možností zmenšené o 1. Potrebujeme zistiť, ktoré z čísel 42, 52, 62 a 72 nemôže označovať počet rozdelených vojačikov. Všimnime si, že 42 vojačikov vieme rozdeliť do 6 radov po 7 vojačikov, 52 vojačikov vieme rozdeliť do 4 radov po 13 vojačikov a 72 vojačikov môžeme rozdeliť do 8 radov po 9 vojačikov. Len 62 vojačikov nevieme rozdeliť podľa Kubkových požiadaviek - môžeme totiž mať iba 1 rad s 62 vojačikmi, 2 rady s 31 vojačikmi, 31 radov s 2 vojačikmi alebo 62 radov s jedným vojačikom.
Takže číslo c) 63 nemôže označovať počet vojačikov, s ktorými sa Kubko a Maťko hrajú.

Úloha 17. Digitálna éra

Majo dostal k narodeninám digitálne hodinky. Tie ukazujú čas, pričom zobrazujú časy od 00:00 po 23:59. Počas koľkých minút za deň môže Majo na displeji svojich hodiniek vidieť číslicu 5 na mieste jednotiek minút?

Výsledok: 144
Riešenie: Pozrime sa, ako sa menia cifry na mieste jednotiek minút. Za každých 10 minút sa tam vystrieda každá cifra od 0 po 9 a každá tam bude jednu minútu. Potrebujeme preto zistiť, na koľko takýchto 10-minútových úsekov sa dá rozsekať deň. Deň má $24 \cdot 60 = 1440$ minút. 10-minútových úsekov je preto $1440 : 10 = 144$. Počas každého z nich možno vidieť jednu minútu cifru 5. Majo preto môže vidieť na mieste jednotiek minút cifru 5 počas 144 minút.

Úloha 18. Ešte k tomu groš...

V kráľovstve Attomatovo sa používajú mince s hodnotami 1, 5, 8 a 10 grošov. Koľko najmenej mincí potrebujeme, aby sme vedeli presne zaplatiť sumu 74 grošov?

Výsledok: 8
Riešenie: Rozoberme prípady podľa toho, koľko mincí s hodnotou 10 grošov použijeme:
Ak použijeme 7 mincí s hodnotou 10 grošov (viac ich použiť nemôžeme), tak ich vieme doplniť iba 4 mincami s hodnotou 1 groš. Pri tom použijeme $4 + 7 = 11$ mincí.
Ak použijeme 6 mincí s hodnotou 10 grošov, tak potrebujeme doplniť sumu 14 grošov. Na to musíme použiť aspoň 3 mince, s hodnotami 1, 5 a 8 grošov. Spolu použijeme $6 + 3 = 9$ mincí.
Ak použijeme 5 mincí s hodnotou 10 grošov, tak potrebujeme doplatiť 24 grošov. To spravíme jednoducho pomocou 3 mincí s hodnotou 8 grošov. Použijeme tak $5 + 3 = 8$ mincí.
Všimnime si, že ak použijeme menej ako 5 mincí s hodnotou 10 grošov, tak nám nebude stačiť použiť 8 mincí. Totiž aj ak by mali všetky ostatné mince hodnotu 8 grošov, tak by všetkých 8 mincí malo dokopy hodnotu najviac $4 \cdot 10 + 4 \cdot 8 = 72$ grošov.
Tým sme ukázali, že na presné zaplatenie sumy 74 grošov potrebujeme použiť najmenej 8 mincí.

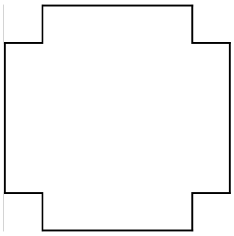
Úloha 19. Antikalkulačka

Samo našiel v zásuvke zvláštnu kalkulačku. Okrem displeja mala len 2 tlačidlá: "+ 1" a "× 2". Kalkulačka vykonala ihneď po stlačení tlačidla danú operáciu s číslom zobrazeným na displeji a prepísala ním pôvodné číslo. Teraz je na kalkulačke zobrazené číslo 1. Najmenej koľkokrát musí Samo stlačiť niektoré z tlačidiel, aby na konci dostal číslo 470?

Výsledok: 13
Riešenie: Postupujme odzadu. Tomu zodpovedá to, že začneme s číslom 470 na kalkulačke. Budeme môcť vykonávať operácie "- 1" a ": 2" a budeme sa snažiť čo najrýchlejšie dostať číslo 1. Keďže delením dvomi vždy zmenšíme číslo na kalkulačke viac ako odčítaním 1, tak sa snažme používať delenie dvomi vždy, keď môžeme. Z čísla 470 sa preto na číslo 1 dostaneme takto:
$470 \to 235 \to 234 \to 117 \to 116 \to 58 \to 29 \to 28 \to 14 \to 7 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1$
Toto je spôsob, ako sme sa vedeli dostať z čísla 470 na číslo 1, na čo najmenej operácií. Preto keď tieto kroky zopakujeme opačným smerom na pôvodnej kalkulačke, dostaneme spôsob, ako sa dostať z čísla 1 na číslo 470 na čo najmenej stlačení kalkulačky. Samo preto musí stlačiť niektoré z tlačidiel kalkulačky najmenej 13-krát.

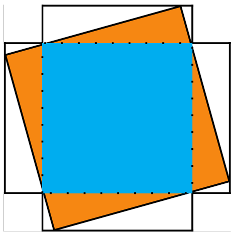
Úloha 20. Čerešnička na torte

Kika pečie tortu. Vytvorila si cesto tvaru štvorca so stranou dlhou 6 cm. Kika z každého rohu vykrojila štvorec so stranou dlhou 1 cm. Zostal kus cesta ako na obrázku. Kika by na svoju tortu chcela z tohto zvyšku cesta vykrojiť ešte čo najväčší štvorec. Aký najväčší obsah v centimetroch štvorcových môže tento štvorec mať?



Výsledok: 24

Riešenie: Najväčší štvorec, ktorý vieme vykrojiť zo zvyšku cesta musí mať takýto tvar:



Tento štvorec obsahuje celý vnútorný štvorec so stranou dlhou 4 cm. Ten má obsah 4 cm · 4 cm = 16 cm². Keď zabudneme na tento štvorec, zostanú nám štyri obdĺžniky s rozmermi 4 cm × 1 cm. Časť veľkého štvorca, ktorá sa v ňom nachádza, tvorí trojuholník so základňou dlhou 4 cm a s výškou 1 cm. Tento trojuholník tak má obsah 4 cm · 1 cm : 2 = 2 cm². Takéto trojuholníky vo všetkých štyroch obdĺžnikoch majú preto obsah spolu 4 · 2 cm² = 8 cm². Celý najväčší štvorec, ktorý môže Kika vykrojiť, tak má obsah 16 cm² + 8 cm² = 24 cm².