

# Matboj – Attomat

18.02.2021

Vzorové riešenia

Kategórie 7, 8, 9, Sekunda, Tercia, Kvarta, Open



p - mat



MINISTERSTVO  
ŠKOLSTVA, VEDY,  
VÝSKUMU A ŠPORTU  
SLOVENSKEJ REPUBLIKY



EURÓPSKA ÚNIA

Európsky sociálny fond  
Európsky fond regionálneho rozvoja



OPERAČNÝ PROGRAM  
ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

**Úloha 01. Sme zrátali**

Andrej, Betka a Cyprián riešili tri úlohy matematickej olympiády. Andrej dostal za prvú úlohu 5 bodov, za druhú úlohu 2 body a za tretiu úlohu nedostal ani jeden bod. Betka v prvej úlohe dostala rovnako veľa bodov ako Andrej, v druhej úlohe dostala o dva body viac ako Andrej a za tretiu úlohu dostala bod. Cyprián získal na prvej úlohe o bod viac ako Betka, na druhej úlohe dostal tiež o bod viac ako Betka a za tretiu úlohu dostal 6 bodov. Koľko spolu bodov získal Cyprián?

Výsledok: 17

Riešenie: Najprv vypočítajme, koľko bodov má za úlohy Betka. Za prvú úlohu dostala rovnako ako Andrej, čiže 5 bodov. Za druhú úlohu dostala o dva body viac ako Andrej, ktorý ju mal za dva body, čiže za druhú úlohu dostala  $2 + 2 = 4$  body. Za tretiu úlohu dostala bod (zo zadania).

Teraz, keď vieme, ako bodovala Betka, tak vieme zistiť, aké body dostal Cyprián. Za prvú úlohu dostal o bod viac ako Betka, ktorá dostala 5 bodov, takže dostal za prvú úlohu  $5 + 1 = 6$  bodov. Na druhej úlohe získal o bod viac ako Betka, ktorá dostala 4 body, takže za druhú úlohu dostal  $4 + 1 = 5$  bodov. Za tretiu úlohu dostal 6 bodov (zo zadania). Spolu teda dostal  $6 + 5 + 6 = 17$  bodov.

Úloha	1	2	3
Andrej	5	2	0
Betka	5	4	1
Cyprián	6	5	6

**Úloha 02. Preteky**

V mestečku Attomatovo sa konali bežecké preteky. Peter a Michal si chceli zmerať svoje bežecké schopnosti, a tak sa prihlásili do súťaže tiež. Peter dobehol v pretekoch do cieľa ako šiesty. Michalovi sa až tak nedarilo a dobehol ako tretí od konca. Medzi Petrom a Michalom dobehlo do cieľa ešte 5 ľudí. Koľko bežcov sa celkovo zúčastnilo pretekov?

Výsledok: 14

Riešenie: Peter prišiel do cieľa šiesty, takže 5 ľudí bolo rýchlejších ako on. Michal skončil tretí od konca, teda po ňom prišli ešte 2 ľudia. Medzi chlapcami dobehlo do cieľa 5 ľudí. Okrem chlapcov tak došlo do cieľa  $5 + 2 + 5 = 12$  ľudí. Po pripočítaní Petra a Michala sa dozvieme, že v behu súťažilo  $12 + 2 = 14$  ľudí.

**Úloha 03. Kopa poznámok**

Patrik si píše poznámky na štvorcové farebné lepiace papieriky. Keď sa dnes pozrel, ako ich má po stole polepené, videl to, čo na obrázku. Akú farbu má papierik, ktorý bol prilepený ako prvý a je na spodku?



Výsledok: modrú

Riešenie: Na obrázku môžeme vidieť, že oranžový papierik prekryva žltý a zelený papierik. Tie ale prekryvajú šedý papierik a ten zas prekryva modrý papierik. Na spodku tak musí byť modrý papierik.

---

## Úloha 04. Povinné čítanie

Jožo si číta povinné čítanie, ktoré má 220 strán. Jednu stranu pritom číta pol minúty, ale po každých 50 prečítaných stranách 10 minút oddychuje. Za akú dlhú dobu v minútach Jožo prečíta svoje povinné čítanie?

Výsledok: 150

Riešenie: Podme na to postupne. Vieme, že jednu stranu Jožo prečíta za pol minúty, takže dve strany prečíta za minútu. Najprv Jožo prečíta 50 strán, to mu bude trvať  $50 : 2 = 25$  minút. Následne má desať minút prestávku. Zatiaľ teda čítal  $25 + 10 = 35$  minút. Tento proces čítania a oddychovania sa ešte trikrát zopakuje, takže 200 strán bude čítať  $35 \cdot 4 = 140$  minút. Posledných dvadsať strán bude čítať  $20 : 2 = 10$  minút. Dokopy bude celú knihu čítať  $140 + 10 = 150$  minút.

---

## Úloha 05. Bude párty

Peter má v utorok narodeniny. Meniny bude mať o 94 dní neskôr. V aký deň v týždni bude mať Peter meniny a odpáli to veľkou online párty?

Výsledok: piatok

Riešenie: Dni v týždni sa opakujú každých 7 dní. Keď vydáme číslo 94 číslom 7 so zvyškom, dostaneme podiel 13 a zvyšok 3. To znamená, že deň, ktorý bude o 94 dní, bude o 13 týždňov a 3 dni. O 13 týždňov od utorka bude znova utorok a tri dni na to bude piatok. Preto bude Peťo mať meniny v piatok.

---

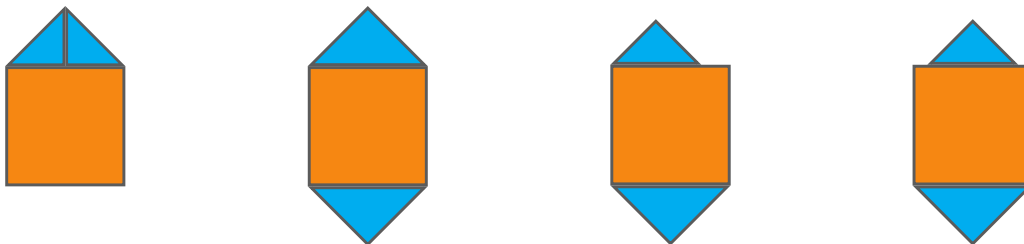
## Úloha 06. Skladačka

Laura si z tvrdého papiera vystrihla štvorec a dva trojuholníky. Potom ich rôzne preusporiadavala tak, aby sa navzájom dotýkali, no neprekryvali. Ktorý z týchto útvarov určite nemohla dostať bez ohľadu na tvar a veľkosť vystrihnutých útvarov?

- a) päťuholník
- b) šesťuholník
- c) sedemuholník
- d) osemuholník
- e) mohla dostať všetky útvary

Výsledok: e)

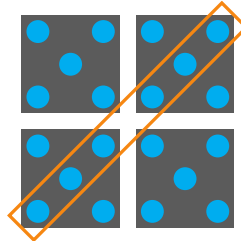
Riešenie: Jednotlivé útvary vieme poskladať napríklad tak ako na týchto obrázkoch:



Preto Laura mohla dostať všetky útvary, a tak je správna možnosť e).

**Úloha 07. "Čo to zase robí s kockami"**

Matko sa hral s kockami s hranou dlhou 25 mm. Uložil ich do tvaru štvorca tak, že pri každej strane bolo 7 kociek. Každú kocku uložil pätkou nahor. Všimol si, že bodky vytvorili niekoľko šikmých čiar. Jednu takú šikmú čiaru vidíš zvýraznenú na obrázku. Teraz je Matko zvedavý, koľko bodiek tvorí najdlhšiu šikmú čiaru z bodiek. Koľko bodiek tvorí túto šikmú čiaru?

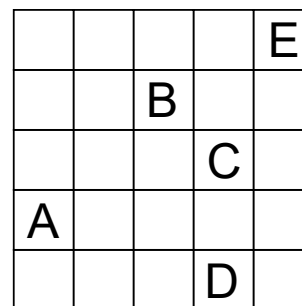
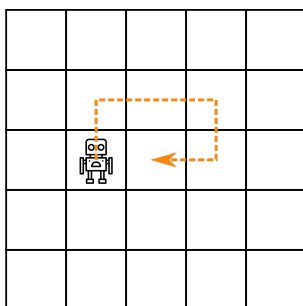


Výsledok: 21

Riešenie: Najdlhšiu šikmú čiaru z bodiek budú tvoriť bodky tých kociek, ktoré ležia na uhlopriečke štvorca z kociek. Táto uhlopriečka je tvorená 7 kockami. Z každej kocky sú 3 bodky súčasťou tejto uhlopriečky. Preto najdlhšiu šikmú čiaru z bodiek tvorí  $7 \cdot 3 = 21$  bodiek.

**Úloha 08. Robot**

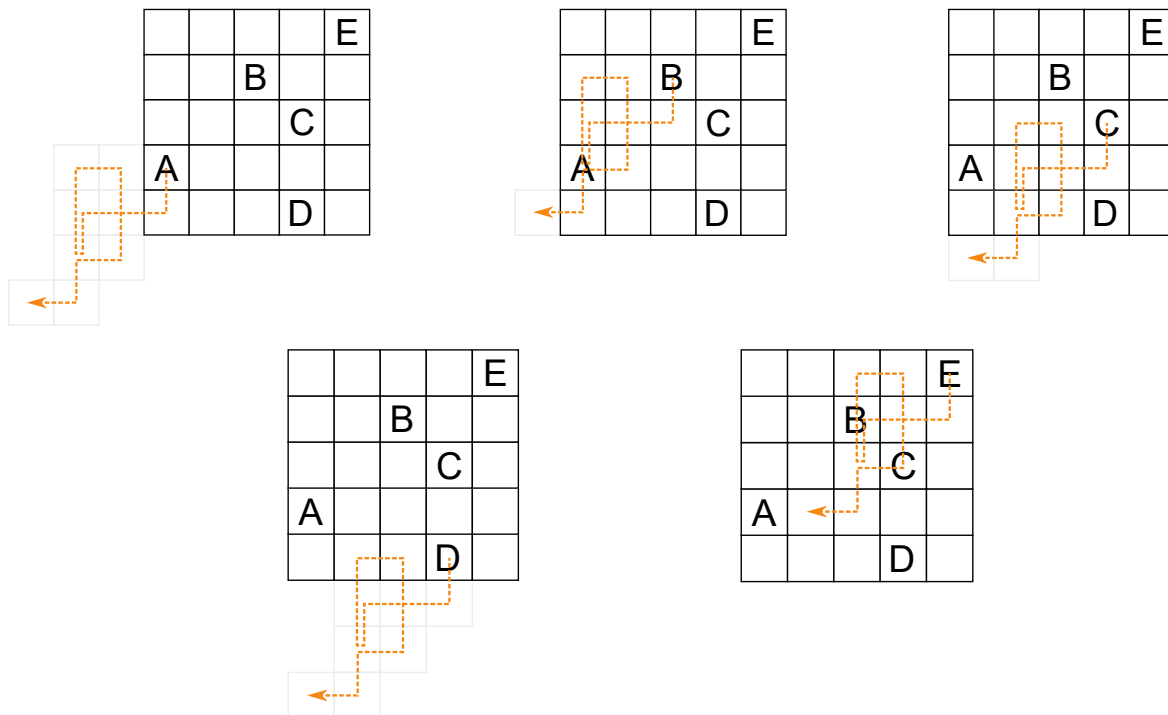
Kubko našiel na povale robota a plánik  $5 \times 5$  štvorčekov. Keď Kubko zadá robotovi postupnosť šípok, robot sa posunie v smere šípok. Ak napríklad Kubko zadá  $\uparrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \leftarrow$ , tak sa robot pohne ako na obrázku vľavo. Kubko položil robota na niektoré políčko plánika vpravo a zadal mu  $\rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \downarrow \downarrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \uparrow$ . Na ktorom z políčok označenom písmenom mohol robot skončiť, ak počas pohybu nevyšiel z plánika?



*Poznámka: Pozor! Viac odpovedí môže byť správnych!*

Výsledok: E

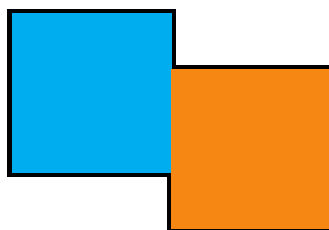
Riešenie: Pre každé políčko zistíme, ako by sa naň dostal po zadaní šípok  $\rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \downarrow \downarrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \uparrow$ . Aby sa nám to ľahšie robilo, tak si zapíšme šípky, ako sa z tohto políčka robot dostane na políčko, kde začína. To dostaneme tak, že šípky napíšeme odzadu a každú šípku otočíme na opačnú. Robot sa tak bude vracáť šípkami  $\downarrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \uparrow \uparrow \rightarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \downarrow \leftarrow$ . Pre každé políčko z A až E si nakreslíme, ako sa bude robot pohybovať:



Vidíme, že iba v prípade políčka E zostal robot na plániku. Preto Kubkov robot mohol skončiť iba na políčku E.

**Úloha 09. Susedské prípady**

Katka a Peťo sú susedia. Každý z nich má vlastnú štvorcovú záhradu a aby si nič nezávideli, ich záhrady sú rovnako veľké. To, ako spolu záhrady susedia, môžeš vidieť na obrázku. Keby si každý z nich chcel oplotiť svoju záhradu, minul by na to 80 metrov pletiva. Katka a Peťo sa však veľmi dobre poznajú a sú kamoši. Rozhodli sa preto, že nebudú svoje záhrady rozdeľovať plotom, a oplotili iba ich spoločný pozemok. Na takéto oplatenie minuli 146 metrov pletiva. Jedného dňa sa ale pohádali, a tak sa Katka rozhodla, že predsa len postaví plot medzi svoju a Peťovu záhradu. Koľko metrov pletiva na to potrebovala?



Výsledok: 7

Riešenie: Keby Katka aj Peťo oplotili každý celú svoju záhradu, obaja by minuli dokopy  $80 + 80 = 160$  metrov pletiva. Keďže nechali svoje záhrady spojené, minuli o  $160 - 146 = 14$  metrov pletiva menej. Avšak časť, kde ich záhrady susedia, by pôvodne oplotovali dvakrát (raz Katka a raz Peťo), preto je dĺžka tejto časti  $14 : 2 = 7$  metrov. Keď sa potom Katka rozhodla plot medzi ich záhrady predsa len postaviť, potrebovala 7 metrov pletiva.

---

**Úloha 10. U zeleného mimozemšťana**

*Patrik nakupoval novú elektroniku. Kúpil si nové hodinky, mobil a tablet. Dokopy za ne zaplatil 600 €. Hodinky a tablet stáli dve tretiny celkovej ceny nákupu. Hodinky a mobil stáli tri pätiny ceny nákupu. Koľko eur Patrik zaplatil za hodinky?*

Výsledok: 160

Riešenie: Hodinky a tablet tvorili dve tretiny ceny, takže mobil musel tvoriť zvyšnú tretinu. Za mobil tak Patrik zaplatil  $600 : 3 = 200$  eur. Podobne tvorili hodinky a mobil tri pätiny ceny nákupu, čiže tablet tvoril zvyšné dve pätiny. Tablet preto stál  $600 : 5 \cdot 2 = 240$  eur. Za hodinky tak Patrik zaplatil  $600 - 200 - 240 = 160$  eur.

---

**Úloha 11. Šťastných 7**

*Fedor sa hrá s číslami. Pre každé číslo počíta, aký súčet majú jeho cifry. Najviac ho zaujali tie čísla, ktorých súčet cifier bol násobkom čísla 7. Tieto čísla nazval šťastné. Fedor sa hneď zamyslel, či existujú dve po sebe idúce celé čísla také, že obe sú šťastné. Existujú také dve čísla?*

Výsledok: áno

Riešenie: Také dve čísla naozaj existujú - napríklad čísla 69999 a 70000. Ako na takúto dvojicu môžeme prísť?

Pozrime sa na to, ako sa mení súčet cifier, keď k nejakému číslu pripočítame jednotku. Ak pripočítaním jednotky nedôjde k prechodu cez desiatku, tak sa súčet cifier zväčší o 1. To ale spôsobí, že ak súčet cifier pôvodného čísla bol násobkom 7, tak po zväčšení o 1 už nebude. Keď dôjde k iba jednému prechodu cez desiatku, tak sa súčet cifier zmenší o 8. To nám znova nepomôže. Pri dvoch prechodoch sa súčet cifier zmenší o 17, pri troch o 26 a pri štyroch o 35. 35 je už násobok 7. Takže je možné, že súčet cifier pôvodného čísla aj čísla o 1 väčšieho bude násobkom 7. Hľadáme teda nejaké číslo, ktoré končí štyrmi deviatkami (kvôli štyrom prechodom cez desiatku) a ktorého súčet cifier je násobkom 7. Takým číslom je napríklad číslo 69999, čo nám dáva nájdenú dvojicu po sebe idúcich šťastných čísel 69999 a 70000.

---

**Úloha 12. Matika má mak i tam**

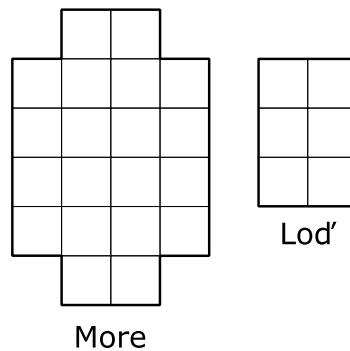
*Oto má rád palindrómy. To sú také čísla, ktoré čítame rovnako odpredu ako odzadu. Napríklad čísla 12321 či 7007 sú palindrómy. Dnes si Oto napísal všetky štvorciferné palindrómy. Pre každý z týchto palindrómov vypočítal súčet cifier a tie, u ktorých mu vyšiel súčet 16, podčiarkol. Koľko palindrómov Oto podčiarkol?*

Výsledok: 8

Riešenie: Štvorciferný palindróm má prvú cifru rovnakú ako poslednú a taktiež druhú cifru rovnakú ako tretiu. Súčet cifier štvorciferného palindrómu tak môžeme spočítať aj tak, že sčítame prvé dve cifry a ich súčet vynásobíme dvomi. Súčet týchto prvých dvoch cifier tak musí byť  $16 : 2 = 8$ . Prvá cifra nemôže byť nula, a tak máme na prvé dve cifry 8 možností:  $8 + 0$ ,  $7 + 1$ ,  $6 + 2$ ,  $5 + 3$ ,  $4 + 4$ ,  $3 + 5$ ,  $2 + 6$  a  $1 + 7$ . To zodpovedá ôsmim palindrómom 8008, 7117, 6226, 5335, 4444, 3553, 2662 a 1771. Oto tak podčiarkol 8 palindrómov.

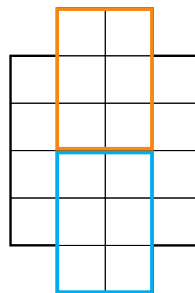
## Úloha 13. Na život a na smrť

Jožo si na mori, ktoré vyzerá tak ako na obrázku, umiestnil loď. Loď je tvorená šiestimi políčkami tvaru obdĺžnika  $2 \times 3$  ako na obrázku, pričom tento obdĺžnik môže byť otočený na výšku aj na šírku. Potom prišiel jeho otravný brat s medzikontinentálnymi balistickými strelami, ktoré keď trafia políčko s loďou, tak zničia celú loď. Teraz je Jožo zvedavý, koľko rakiet musí jeho brat vystreliť, aby určite zničil jeho loď. Koľko najmenej rakiet musí vystreliť?



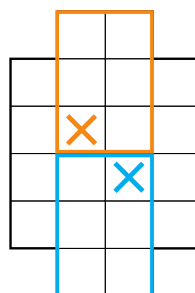
Výsledok: 2

Riešenie: Všimnime si modrý a oranžový obdĺžnik na obrázku:



Jožov brat musí do každého obdĺžnika vystreliť aspoň raz - ináč by loď mohla byť práve v tomto obdĺžniku a nezasiahol by ju. Takže Jožov brat potrebuje vystreliť aspoň dve rakety.

Dva výstrely zároveň postačujú. Stačí vystreliť na políčka ako na tomto obrázku:



Jožov brat preto musí vystreliť aspoň 2 rakety.

---

**Úloha 14. Polámaná špajdľa**

Erik rozlámal špajdle a zobral si 5 kúskov. Tieto kúsky boli dlhé postupne 5 cm, 7 cm, 8 cm, 10 cm a 5 cm. Potom si z nich vybral niektoré tri kúsky a pokúsil sa z nich vytvoriť taký trojuholník, že každý z týchto troch kúskov tvoril jednu celú stranu trojuholníka. Koľko rôznych trojuholníkov takto mohol Erik dostať? *Poznámka: Dva trojuholníky, ktoré sa líšia iba v tom, ktorý kúsok s dĺžkou 5 cm je použitý, považujeme za rovnaké.*

Výsledok: 6

Riešenie: Rozoberme možnosti podľa toho, koľko vybratých kúskov malo dĺžku 5 cm.

Ak Erik vybral oba kúsky s dĺžkou 5 cm, tak mohol dostať trojuholníky, ktorých strany mali dĺžky (5 cm, 5 cm, 7 cm), (5 cm, 5 cm, 8 cm) a (5 cm, 5 cm, 10 cm). V prvých dvoch prípadoch skutočne ide o trojuholníky, no v treťom nie. Jeho dĺžky totiž nespĺňajú trojuholníkovú nerovnosť - aby tá bola splnená, tak by muselo platiť  $5\text{ cm} + 5\text{ cm} > 10\text{ cm}$ , čo ale neplatí. V tomto prípade tak dostávame 2 trojuholníky, ktoré mohol Erik dostať.

Ak Erik vybral iba jeden kúsok s dĺžkou 5 cm, tak mohol dostať trojuholníky s dĺžkami strán (5 cm, 7 cm, 8 cm), (5 cm, 7 cm, 10 cm) a (5 cm, 8 cm, 10 cm). V tomto prípade sú všetky tri naozaj trojuholníky, čím dostávame ďalšie 3 trojuholníky pre Erika.

Ak Erik nevybral žiadny kúsok s dĺžkou 5 cm, tak jediná možnosť je možnosť (7 cm, 8 cm, 10 cm), čo naozaj je trojuholník. Tým sme našli posledný trojuholník, ktorý mohol Erik dostať.

Spolu tak mohol Erik dostať  $2 + 3 + 1 = 6$  rôznych trojuholníkov.

---

**Úloha 15. Nemám ani páru**

Terka si napísala do radu čísla 2, 4, 6, 8, ..., 2020. Napísala doň všetky párne čísla väčšie ako 1 a menšie ako 2021. Potom spočítala, koľkokrát napísala jednotlivé cifry. Ktorú cifru napísala najviackrát?

Výsledok: 1

Riešenie: Najviackrát napísaná cifra je jednotka. Ukážme si, prečo.

Od 1000 do 2020 je 511 párných čísel, z toho 500 je od 1000 do 1998, takže na mieste tisícok je jednotka použitá 500-krát a dvojka 11-krát.

Na mieste stoviek a desiatok je zhruba rovnako často použitá každá cifra až na 0; v trojciferných číslach nemôže byť 0 na mieste stoviek (lebo by to nebolo trojciferné číslo) a takisto v dvojciferných číslach nemôže byť na mieste desiatok 0, teda nula je na mieste desiatok a stoviek použitá menej ako zvyšné cifry.

Je 1010 párných čísel od 1 do 2020, pričom každé číslo bude mať cifru na mieste jednotiek, takže na mieste jednotiek je 1010 cifier. Na mieste jednotiek sa strieda 5 cifier (2, 4, 6, 8, 0), takže každá párna cifra je na mieste jednotiek použitá o 202-krát viac ako nepárne cifry.

Cifra 1 tak získala na mieste tisícok veľký "náskok" pred cifrou 2 (zhruba 500 je omnoho viac ako zhruba 200) a zvyšných cifier je použitých ešte menej. Preto je jednotiek najviac.

*Poznámka: Ak chceme byť presní, tak cifra 1 je použitá 705-krát, čo je o 291-krát viac ako druhá najčastejšia cifra 2. Tá je použitá 414-krát.*



---

**Úloha 16. Koláčik - mňam**

Akonáhle mamka upiekla koláč, položila ho na stôl, nakrájala na niekoľko zhodných kúskov a odišla na záhradu čítať knihu. Najprv prišiel do kuchyne ocko, ktorý zobral štvrtinu z tohto koláča a odišiel preč. Následne prišiel Julkin brat, ktorý si zobral jednu tretinu zo zvyšných koláčov. Po ňom prišla Julka, ktorá sa čudovala, prečo je na stole tak málo koláčov, a preto si zobrala štvrtinu zo zvyšku. Keď sa mamka vrátila do kuchyne, bolo na stole len šesť kúskov koláča. Na koľko kúskov rozdelila mamka koláč?

Výsledok: 16

Riešenie: Na začiatku bol koláč celý a z tohto koláča si ocko zobral 1 štvrtinu. Teda z pôvodných 4 štvrtín ostali už len  $4 - 1 = 3$  štvrtiny koláča. Z týchto 3 štvrtín si Julkin brat zobral 1 tretinu, čo je  $3 : 3 = 1$  štvrtina koláča. Takže po bratovi ostali už len  $3 - 1 = 2$  štvrtiny pôvodného koláča, teda 1 polovica. Ďalej si Julka zobrala 1 štvrtinu z toho, čo tam ostalo, teda 1 štvrtinu z 1 polovice koláča. Julka si teda zobrala 1 osminu koláča. Po Julke tak ostali už len  $4 - 1 = 3$  osminy koláča. Tieto 3 osminy našla potom mamka a vieme, že to bolo 6 kúskov. 3 osminy koláča tak predstavujú 6 kúskov, čiže 1 osmina koláča sú  $6 : 3 = 2$  kúsky.

Celý pôvodný koláč, ktorý je tvorený 8 osminami, teda tvorilo  $8 \cdot 2 = 16$  kúskov.

Mamka tak pôvodný koláč rozrezala na 16 rovnakých kúskov.

---

**Úloha 17. Ach, tie zlomky...**

Kaja sa učila sčítavať zlomky. Napísala si na tabuľu zlomky  $2/3$ ,  $2/15$ ,  $2/35$ ,  $2/63$ ,  $2/99$  a  $2/143$  a všetky ich sčítala. Dostala tak zlomok, ktorý upravila do základného tvaru. Akú hodnotu mal čitateľ tohto zlomku?

Výsledok: 12

Riešenie: Postupne sčítavajme jednotlivé zlomky:

$$2/3 + 2/15 = 12/15 = 4/5$$

$$4/5 + 2/35 = 30/35 = 6/7$$

$$6/7 + 2/63 = 56/63 = 8/9$$

$$8/9 + 2/99 = 90/99 = 10/11$$

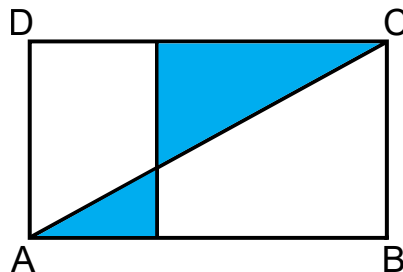
$$10/11 + 2/143 = 132/143 = 12/13$$

Takže čitateľ zlomku, ktorý dostala Kaja, je 12.

*Poznámka: Všimnime si, aké medzisúčty sme dostávali:  $4/5$ ,  $6/7$ ,  $8/9$ ,  $10/11$ ,  $12/13$ . Každý ďalší zlomok má aj čitateľ aj menovateľ o 2 väčší (to dokonca platí aj pre  $2/3$ , s ktorými sme začali). To je spôsobené tým, že sčítované zlomky sa dajú zapísať ako  $1/1 - 1/3$ ,  $1/3 - 1/5$ ,  $1/5 - 1/7$ ,  $1/7 - 1/9$ ,  $1/9 - 1/11$  a  $1/11 - 1/13$ . Preto sú jednotlivé medzisúčty  $1 - 1/5$ ,  $1 - 1/7$ ,  $1 - 1/9$ ,  $1 - 1/11$  a  $1 - 1/13$ .*

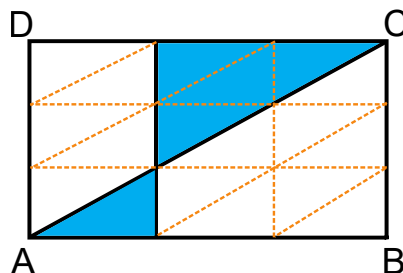
**Úloha 18. Bezlepkový bio koláč z kokosovo-mandľového mlieka**

Máme obdĺžnikový koláč ABCD so stranami dlhými 30 centimetrov a 15 centimetrov. Tento koláč váži 720 gramov a cesto použité naň je všade rovnaké. Koláč je už rozrezaný v jednej tretine dlhšej strany na menšiu a väčšiu obdĺžnikovú časť. Následne prišla mamička a prekrojila koláč po uhlopriečke. Potom svojim dvom deťom dala kúsky, ktoré sú na obrázku vyznačené modrou. Koľko gramov koláča dostali spolu obe deti?



Výsledok: 200

Riešenie: Pokúsime sa rozdeliť koláč na časti, ktorých obsah vieme pomocou obsahu koláča vyjadriť. Vidíme, že rezy sa pretnú v jednej tretine šírky koláča (lebo tam sme robili prvý rez) aj v jednej tretine výšky koláča (keďže uhlopriečka stúpa koláčom rovnomerne). Preto je dobrý nápad rozdeliť koláč kolmými rezmi na akúsi obdĺžnikovú mriežku, ktorej jeden obdĺžniček má tretinové dĺžky strán oproti koláču. Ak ešte v každom takomto malom obdĺžničku nakreslíme uhlopriečku, vidíme, že deti spolu dostali 5 trojuholníkov zo všetkých 18 trojuholníkov, na ktoré sme koláč rozdelili. Jeden takýto trojuholník váži  $720 : 18 = 40$  gramov. Kúsky, ktoré dostali deti, tak spolu vážia  $5 \cdot 40 = 200$  gramov.



**Úloha 19. Zabudnuté heslo**

Samko zabudol kód na odomknutie svojho mobilu. Zase. Našťastie si k nemu napísal pomôcku, ako si naň spomenie. Tá znela: je to najmenšie také prirodzené číslo, ktoré sa začína cifrou 4, no keď túto cifru presunieme na koniec čísla, tak dostaneme 4-krát menšie číslo, ktoré sa nezačína cifrou 0. Aký kód odomyká Samkov mobil?

Výsledok: 410256

Riešenie: Nazývajme "číslo pred zmenou" číslo pred presunutím cifry 4 a "číslo po zmene" číslo po presunutí cifry 4. Číslo pred zmenou je 4-krát väčšie ako číslo po zmene.

$$\begin{array}{r}
 \boxed{\phantom{0000}}4 \\
 \cdot 4 \\
 \hline
 \boxed{\phantom{0000}}
 \end{array}$$

Vieme, že posledná cifra čísla po zmene je 4. Keď ju vynásobíme štyrmi, zistíme, že číslo pred zmenou musí končiť cifrou 6. Takisto si môžeme poznačiť, že sme raz prešli pri násobení cez desiatku.

$$\begin{array}{r} \boxed{64} \\ \cdot 4 \\ \hline \boxed{6} \end{array}$$

Predposledná cifra čísla po zmene je teda 6. Keď ju vynásobíme štyrmi, zistíme, že číslo pred zmenou má predposlednú cifru 5 (nesmieme zabudnúť započítať predošlý prechod cez desiatku). Tentokrát si poznačíme, že sme cez desiatku prešli až dvakrát.

$$\begin{array}{r} \boxed{564} \\ \cdot 4 \\ \hline \boxed{56} \end{array}$$

Rovnaký postup môžeme opakovať ďalej. Tento postup nám odhaľuje cifry čísla pred zmenou postupne odzadu: 6, 5, 2, 0, 1, 4.

$$\begin{array}{r} \boxed{2564} \\ \cdot 4 \\ \hline \boxed{256} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{02564} \\ \cdot 4 \\ \hline \boxed{0256} \end{array}$$

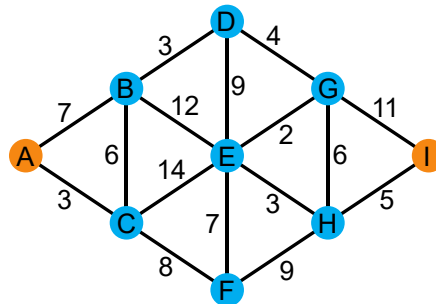
$$\begin{array}{r} \boxed{102564} \\ \cdot 4 \\ \hline \boxed{10256} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{102564} \\ \cdot 4 \\ \hline \boxed{410256} \end{array}$$

Keď natrafíme na cifru 4, môžeme sa zastaviť - cifry sme určili jednoznačne, pri poslednom násobení sme neprešli cez desiatku a chceme, aby číslo bolo čo najmenšie, teda aby malo čo najmenej cifier. Samkov mobil teda odomyká kód 410256.

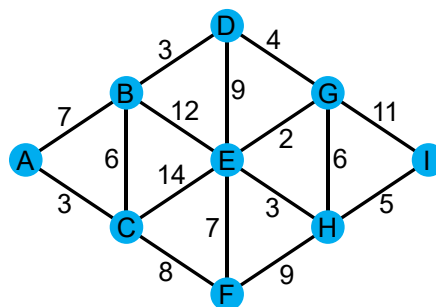
Úloha 20. Vláčiková

V krajine Attomatovo sú železničné stanice označené písmenami. Kubo si plánuje svoju cestu vláčikmi medzi dvomi stanicami A a I. Železničná sieť vyzerá tak ako na obrázku - medzi stanicami spojenými čiarou premáva obojsmerná linka a cesta medzi mestami jej trvá toľko minút, ako je číslo napísané pri tejto čiare. Koľko najmenej minút môže Kubovi trvať cesta z mesta A do mesta I?

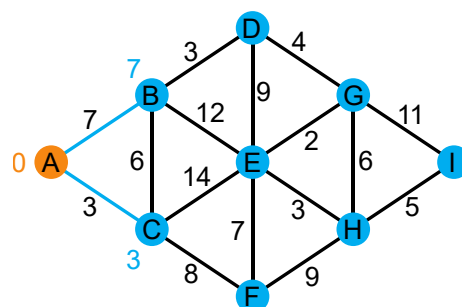


Výsledok: 24

Riešenie: Zistíme pre každé mesto, koľko najmenej minút môže trvať cesta z A do tohto mesta. Najprv si ale zafarbíme všetky mestá namodro.

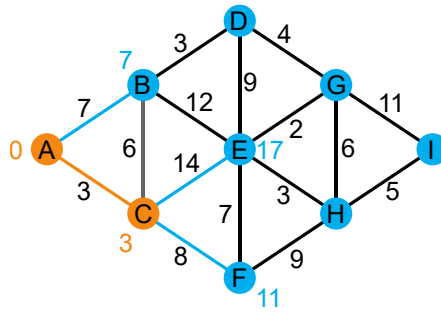


K mestám na obrázku budeme pripisovať čísla, a to nasledovne. Začneme v meste A, ktoré zafarbíme naoranžovo a ku ktorému pripíšeme číslo 0. Ku každému modrému mestu, do ktorého sa vieme dostať z A, pripíšeme číslo. Toto číslo bude súčtom čísla, ktoré má A (teda 0), a čísla na čiare, ktorá spája toto mesto a A. Dostaneme tak niečo takéto:

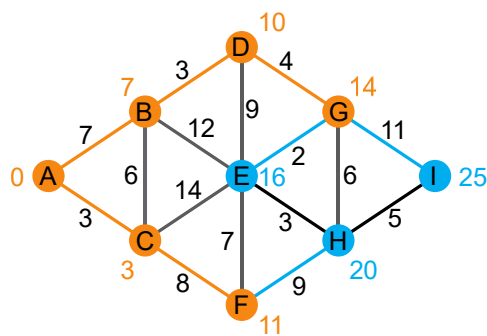
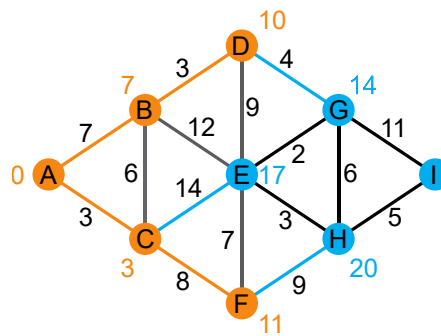
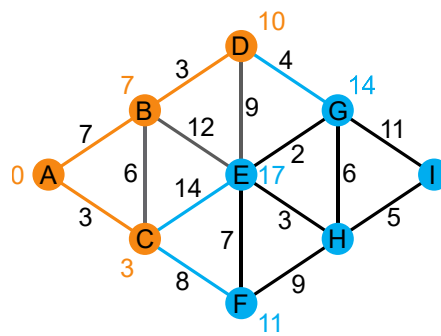
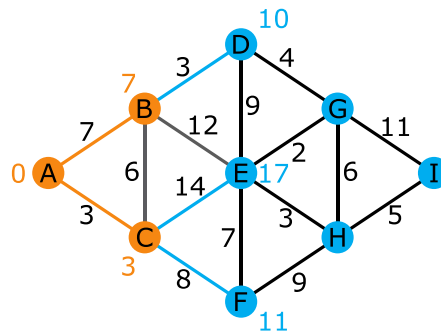


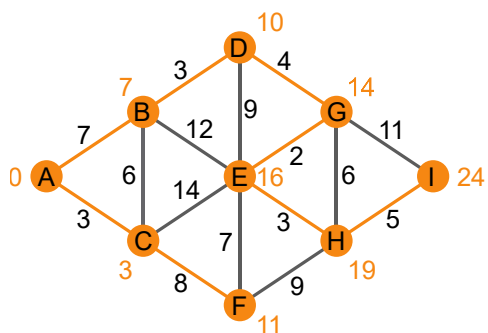
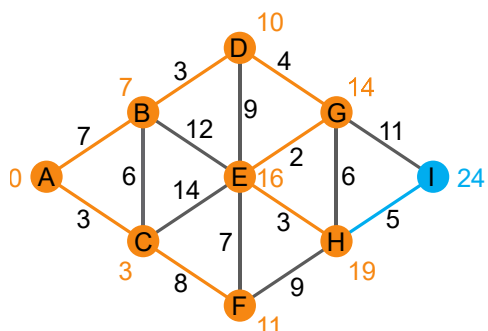
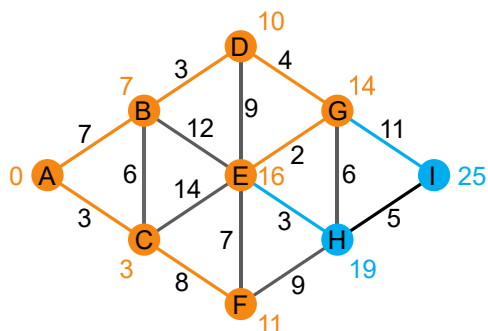
Potom si z modrých miest, ktoré majú pripísané nejaké číslo, vyberieme to, ktoré má pripísané najmenšie číslo, teda v tomto prípade C. To, že sme vybrali mesto s najmenším číslom, nám hovorí, že z iných modrých miest by sme sa do tohto mesta už nevedeli dostať za kratší čas. Zafarbíme toto mesto naoranžovo a spravme to isté, ako pre mesto A. Teda zoberme si všetky modré mestá, do ktorých sa vieme dostať z C. Ku každému pripíšme číslo, ktoré je súčtom čísla pri C a čísla čiar spájajúcej toto mesto s C.

Pri tom sa môže stať, že by sme k nejakému mestu pripísali už nejaké druhé číslo. Napríklad teraz sú pri B pripísané čísla 7 a 9. Z nich môžeme to väčšie zmazať - to zodpovedá tomu, že priama cesta z A do B je rýchlejšia ako cesta z A do B cez C. Tým dostávame takýto obrázok:



Postupne pokračujme týmto postupom aj s ďalšími mestami, teda postupne B, D, F, G, E, H a I:





Na poslednom z obrázkov je už každé mesto zafarbené naoranžovo a pri každom meste pripísané nejaké číslo. Tieto čísla zodpovedajú tomu, koľko minút môže trvať najkratšia cesta z A do tohto mesta. Teda špeciálne najkratšia cesta z A do I môže trvať 24 minút.