Vzorové riešenia Matboj MatX 2021

matx.p-mat.sk

8. apríla 2021

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje. Viacej informácií na www.ludskezdroje.gov.sk či www.minedu.sk.

Úloha 1
Štvorciferné číslo tvaru ABCD s rôznymi ciframi A, B, C a D sme zaokrúhlili na stovky a dostali sme číslo CD00. Aké najväčšie mohlo byť pôvodné číslo ABCD?

Riešenie 1
Pri zaokrúhľovaní na stovky sa cifra na mieste tisícok zmení, iba ak sme zaokrúhľovali nahor a na mieste stoviek bola predtým cifra 9. Preto B musí byť 9 a po zaokrúhlení bude na mieste stoviek 0, z čoho teda vieme, že D = 0. Cifra na mieste tisícok sa musela zmeniť o 1, a zatiaľ sme využili cifry 0 a 9. Ak teda chceme čo najväčšie číslo, zoberieme zo zvyšných cifier dve najvyššie, teda 7 a 8. Keďže cifra na mieste tisícok sa po zaokrúhlení zväčšila, tak pôvodné číslo muselo začínať cifrou 7, a teda A = 7. Zostáva už len C = 8. Pôvodné číslo mohlo byť najviac 7980.

Úloha 2
Dvadsať zvieratiek sedí v kruhu a dohaduje sa o tom, ktoré dve zvieratká pôjdu na prieskum. Každé zvieratko sedí na kameni, pričom na kameňoch sú v smere hodinových ručičiek napísané čísla 1 až 20. Výber prebieha tak, že sa začne počítať od tigra, ktorý sedí na kameni číslo 1, pričom každé piate zvieratko je z výberu vyradené a odchádza preč. Ako prvé tak odídu zvieratká na kameňoch číslo 5, 10, 15 a tak ďalej. Ak je kameň už prázdny, nepočíta sa – počítajú sa iba kamene so zvieratkami. Slimák s medveďom veľmi chcú ísť prieskum. Na ktoré kamene si majú na začiatku sadnúť, aby ostali ako dve posledné zvieratká?

Poznámka: Riešenie zadajte ako dve čísla A a B oddelené čiarkou (teda vo formáte A, B), kde A a B sú čísla kameňov slimáka a medveďa.

Riešenie 2
Najjednoduchšie v tomto prípade asi nie je nič počítať, ale celý proces si nasimulovať – napísať si 20 čísel do kruhu a postupne ich škrtať v poradí 5, 10, 15, 20, 6, 12, 18, 4, 13, 1, 9, 19, 11, 3, 17, 16, 2 a 8. Ostanú miesta 7 a 14.
Táto úloha je príkladom takzvaného Josephovho problému, ktorý rieši, kde sa postaviť pri rozpočítavaní podľa rôznych pravidiel.

Úloha 3
Nájdite také usporiadanie prirodzených čísel 1–12, aby sa v rade medzi dvoma číslami nikdy nevyskytoval ich priemer. Napríklad zoradenie 1, 2, 4, 8, 3, 12, 11, 9, 10, 7, 5, 6 je nesprávne, pretože číslo 2 leží niekde medzi číslami 1 a 3. Stačí nájsť jedno správne zoradenie.

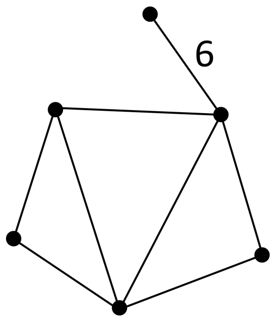
Poznámka: Ako riešenie zadajte zoznam 12 čísel oddelených čiarkami.

Riešenie 3
Ak si napíšeme náhodné usporiadanie čísel od 1 do 12, pravdepodobne bude vždy medzi niektorými dvoma číslami ich priemer. Treba si teda vymyslieť systém.
Začnime uvažovať nad tou istou úlohou, ale len s tromi číslami. Zrejme usporiadanie 1, 2, 3 nie je dobré, ani 3, 2, 1. Ale zato 1, 3, 2 je fajn.
Teraz si ukážeme, ako takéto usporiadanie troch čísel prevedieme na usporiadanie šiestich čísel.
Prvá polovica usporiadania šiestich čísel bude usporiadanie troch čísel, ale vynásobené dvoma (teda 2, 6, 4). Vynásobenie dvojkou vlastnosť priemerov nezmení.

Druhá polovica bude dobré usporiadanie troch čísel vynásobené dvoma mínus 1 (teda 1, 5, 3). Toto nám tiež vlastnosť priemerov nezmení. Zároveň tak vyrobíme nepárne čísla, ktoré v prvej polovici chýbajú.
Máme teda usporiadanie 2, 6, 4, 1, 5, 3. Určite vieme, že v prvej polovici vlastnosť priemerov neporušíme, ani v druhej polovici nie. A ak si vyberieme jedno číslo z prvej polovice (párne) a druhé z druhej (to bude nepárne), tak ich priemer nebude prirodzené číslo.
Dostali sme tak dlhšie usporiadanie, ktoré spĺňa dané podmienky. Teraz už len túto fintu zopakujeme na usporiadaní 6 čísel, aby sme dostali usporiadanie 12 čísel: 4, 12, 8, 2, 10, 6, 3, 11, 7, 1, 9, 5.
Nejde o jediné možné usporiadanie, uznávali sme samozrejme všetky možné riešenia, ktorých je 6128, to je asi 0,0013 percenta zo všetkých možných usporiadaní.

Úloha 4

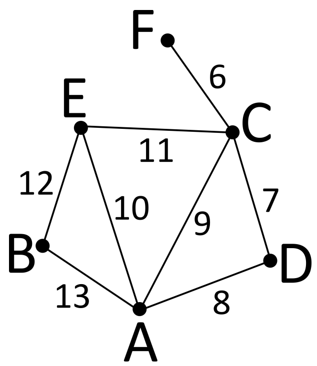
Andrej objavil mapku okolitých dedín a ciest medzi nimi. K mape našiel aj informácie o najkratších trasách medzi jednotlivými dedinami (v kilometroch). Najkratšia trasa môže prechádzať aj cez inú dedinu. Na mape však chýbajú informácie o tom, ktorá dedina je ktorá... V mape je zaznačená len dĺžka jednej cesty. Aký je súčet dĺžok všetkých ciest v okolí (v kilometroch)?



	F	**E**	**D**	**C**	**B**
A	15	10	8	9	13
B	28	12	21	22	
C	6	11	7		
D	13	18			
E	17				

Riešenie 4

Správne dĺžky ciest a polohy dedín sú nasledovné:

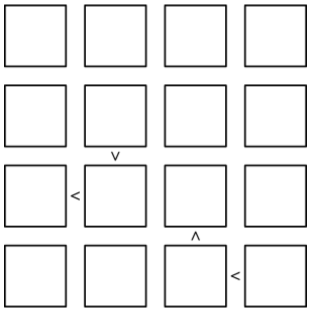


Súčet dĺžok ciest teda je 76 km.

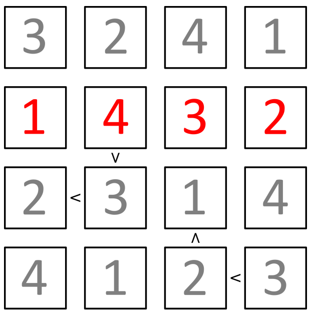
Úloha 5

Vyriešte nasledujúcu logickú úlohu. V každom políčku sa nachádza prirodzené číslo od 1 do 4, pričom v každom riadku aj stĺpci sa každé číslo vyskytuje práve raz. Zároveň musia byť zachované naznačené nerovnosti medzi jednotlivými políčkami. Aké čísla sa nachádzajú postupne v druhom riadku?

Poznámka: Výsledok zapíšte ako 4-ciferné číslo.



Riešenie 5



Úloha 6

Augustin sleduje, na koľký pokus mu na kocke padne šestka. Ak mu šestka padne na prvý pokus, zapíše si na papier číslo 1 a ide odznova. Ak mu šestka nepadla v prvom pokuse, pokračuje a hodí znovu. Ak mu padla šestka teraz, zapíše si na papier číslo 2, pretože tentokrát mu šestka padla na druhý pokus a ide odznova. Ak mu ani na druhýkrát nepadla šestka, pokračuje tretím pokusom – a tak ďalej. Ak mu náhodou ani po 30 hodoch nepadne šestka, zapíše si číslo 30 a ide odznova. Ktoré číslo sa bude na Augustinovom papieri objavovať najčastejšie?

Riešenie 6

Ak si veľakrát hodíte kockou, zistíte, že šestka padne približne na každý šiesty pokus. To znamená, že približne v 1/6 prípadov (16,67 %) si Augustin zapíše na papier číslo 1. V ostatných 5/6 prípadov pokračuje ďalej. Čo by sa muselo stať, aby na papier zapísal dvojku? V prvom hode NESMIE hodiť šestku, v druhom hode ju hodiť MUSÍ. To sa stane zhruba v $5/6 \times 1/6$ prípadov (13,89 %). Analogicky, aby zapísal trojku, v prvom hode NESMIE hodiť šestku, v druhom tiež NESMIE hodiť šestku a v treťom MUSÍ. To sa udeje asi v $5/6 \times 5/6 \times 1/6$ prípadov (11,58 %). Vidíme, že každé ďalšie číslo má menšiu a menšiu šancu – ak chce zapísať číslo N, prvých $N-1$ hodov musí byť neúspešných (s šancou 5/6) a až posledný úspešný. Limit 30 hodov je v zadaní len preto, aby Augustin nemohol hádzať neúspešne donekonečna, ale na riešení úlohy nič nemení.

Úloha 7
Máme dve 100-ciferné čísla. Každé z nich má medzi svojimi ciframi práve 5 jednotiek, zvyšné cifry sú nuly. Tieto dve čísla medzi sebou vynásobíme. Aký bude ciferný súčet takto vzniknutého súčinu?

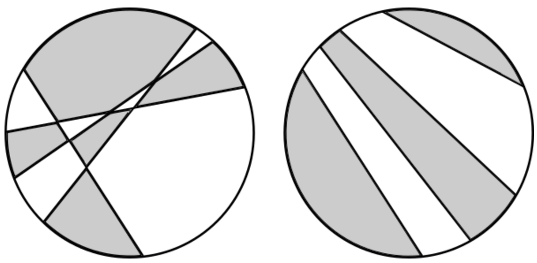
Riešenie 7
Predstavme si, ako by sme tieto dve čísla násobili klasicky pod sebou. Postupne by sme šli po cifrách spodného čísla. Pokiaľ by cifra bola nula, tak by sme nemuseli nič robiť. Pokiaľ by bola jednotka, tak na všetkých pozíciách, kde je v prvom čísle jednotka, by nám vynásobením vznikla vo výsledku tiež jednotka. Týchto päť čísiel, každé s piatimi jednotkami, by sme potom sčítali a dostali výsledok.

Ciferný súčet výsledku by nám mohlo pokaziť to, že by pre niektorú cifru prešiel súčet cifier na tomto mieste cez 10. Avšak maximálna hodnota každej cifry vo výsledku súčinu je 5. Tým pádom platí, že ciferný súčet bude $5 \times 5 = 25$.

Úloha 8
Janko a Janka dostali na svoje narodeniny dve identické okrúhle torty. Janka svoju tortu rozrezala 4 priamymi rezmi tak, aby dostala čo najväčší počet kúskov. Naopak Janko tortu rozrezal 4 priamymi rezmi tak, aby dostal čo najmenší počet kúskov. O koľko kúskov torty mala Janka viac ako Janko?

Poznámka: Všetky rezy boli rôzne, priame, zvislé, celistvé a viedli cez tortu. V úlohe preto nehľadajte žiadne záludnosti.

Riešenie 8
Janka mohla tortu nakrájať maximálne na 11 kúskov. Na toto sa dá vďaka malému počtu rezov prísť experimentálne, ale vo všeobecnosti platí, že dobre vedený rez číslo N pridá práve N nových kúskov, pričom sme začínali s 1 kúskom (celou tortou). Maximum teda naozaj je 1+1+2+3+4 = 11. Odporúčame pozrieť si o takzvanej „Lazy caterer's sequence“, viac napríklad na Wikipedii: https://en.wikipedia.org/wiki/Lazy_caterer%27s_sequence.
Janko minimalizoval počet kúskov tým, že sa mu rezy nepretínali, a teda jeho počet kúskov je 5.
Janka mala o 6 kúskov viac ako Janko.



Úloha 9
V súťaži Matboj MatX vyriešil tím ”Proti Gustíkovi žiaden dišputát”správne 27 úloh. Tím ”Hurikán Nina”vyriešil správne dokonca 30 úloh. Tím ”Ček it out”vyriešil správne 25 úloh a tím ”Kompatsch”správne 24 úloh. Tieto tímy nikdy nevyužili možnosť preskočiť úlohu a odpovedali na všetkých 35 úloh v súťaži. Mohlo sa stať, že každú úlohu súťaže aspoň jeden zo zmienených tímov vyriešil nesprávne?

Riešenie 9

Miesto toho, aby nás zaujímalo, koľko úloh každý tím vyriešil, sa pozrime na to, koľko úloh tímy nevyriešili – postupne je to 8, 5, 10 a 11 úloh. Spolu je to teda 34 nesprávnych odpovedí. Súťaž má spolu 35 úloh, preto aspoň jednu úlohu museli všetky tímy vyriešiť správne. Odpoveď teda je NIE.

Úloha 10

Na ktorom políčku musíte začať svoju cestu, aby ste postupne navštívili všetky políčka a skončili na políčku označenom hviezdičkou? Každé políčko obsahuje inštrukciu o tom, ktoré políčko po ňom logicky nasleduje.

Poznámka: Odpoveď zadajte ako súradnice počiatočného políčka, napríklad ako A1.

	1	2	3	4	5	6
A	↓5	→2	←2	↓3	↓1	←1
B	↓1	↓3	↓4	←2	←4	←2
C	↓2	↓1	↑1	→1	←3	←3
D	→2	→4	★	←3	↓1	↑2
E	→2	→4	↑4	↑2	←1	↑2
F	→1	↑5	→3	→1	↑2	↑5

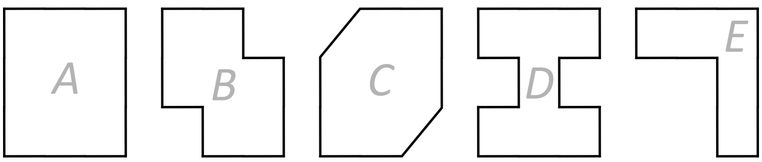
Riešenie 10

Pointa tohto príkladu nie je v tom vyriešiť ho (môžeme len jednoducho hľadať predchádzajúce políčko cesty až na začiatok), ale o tom vyriešiť ho efektívne. Spätné hľadanie cesty, tzv. backtracking, je v tomto prípade extrémne pomalé. Oveľa jednoduchšie je začať na náhodnom políčku a ísť v smere cesty (v priemere trafíme políčko niekde v strede cesty), pričom navštívené políčka vyškrtneme, pretože zjavne nemôžu byť ako prvé na ceste. Keď prídeme k hviezdičke, zvolíme si opäť náhodné nepreškrtnuté políčko a nasledujeme pokyny, až kým sa nedostaneme k už vyškrtaným políčkam a tak ďalej. Posledné nevyškrtnuté políčko je to, ktoré hľadáme. V priemernom prípade by nám malo stačiť 4–5 iterácií tohto postupu. Cesta začína na políčku F4.

Úloha 11

Ktorý z nasledujúcich pozemkov má najmenší obvod? A ktorý najväčší?

Poznámka: Riešenie zadajte ako dve písmená oddelené čiarkou (teda napríklad ako A, B), kde prvé písmeno označuje pozemok s najmenším obvodom a druhé pozemok s najväčším obvodom.



Riešenie 11

Ak z obdĺžnika (A) vyrežeme z rohu jeden štvorec či obdĺžnik (= útvar E) alebo dva štvorce či obdĺžniky (= útvar B), obvod útvaru sa nezmení – jednu hranu len nahradíme hranou rovnakej dĺžky. Avšak ak vyrežeme štvorce alebo obdĺžniky zo stredu strany (= útvar D), nahradíme jednu hranu až tromi ďalšími. Útvar D teda má väčší obvod ako útvar A. Naproti tomu útvar so skosenými rohmi (C) má obvod menší ako A kvôli trojuholníkovej nerovnosti (dve strany trojuholníka sme nahradili treťou, ktorá musí byť kratšia ako súčet zvyšných dvoch).

Úloha 12

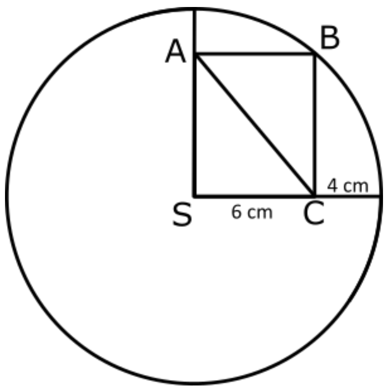
Marienka ukladá farebné kamienky do radu. Má 4 kremene, 8 achátov a 7 malachitov. Jej podmienkou je, aby kremeň bol vždy medzi achátom a malachitom. Taktiež achát a malachit nesmú byť v rade vedľa seba. Koľkými rôznymi spôsobmi vie kamienky zoradiť?

Riešenie 12

Kremeň určite nemôže byť na okraji a zároveň musí oddeľovať acháty od malachitov. Keďže kremeňov je párny počet, na začiatku a na konci musí byť ten istý typ kameňa. Takže jediné postupnosti kamienkov, ktoré pripadajú do úvahy sú:
niekoľko achátov – 1 kremeň – niekoľko malachitov – 1 kremeň ... – niekoľko achátov
niekoľko malachitov – 1 kremeň – niekoľko malachitov – 1 kremeň ... – niekoľko malachitov
Ak sú na začiatku aj na konci acháty, máme spolu 3 skupiny achátov (ktorých je spolu 8) a 2 skupiny malachitov (ktorých je spolu 7), napríklad AAKMMKAAAKMMMMMKAAA. 8 achátov možno do troch neprázdnych skupín rozdeliť 21 spôsobmi, 7 malachitov do dvoch neprázdnych skupín 6 spôsobmi. Spolu nám to dáva 21 × 6 = 126 postupností kameňov, ak začíname achátom.
Ak si podobnú úvahu spravíme pre postupnosti začínajúce malachitom, dostaneme ďalších 105 možností. Dokopy teda 126 + 105 = 231 možností.

Úloha 13

Máme kružnicu so stredom *S*, v ktorej sa nachádza obdĺžnik *SABC* ako na obrázku. Aká je dĺžka uhlopriečky *AC* (v cm)?



Riešenie 13

Ak by sme chceli vypočítať dĺžku uhlopriečky *AC* priamo, asi by nám to zabralo nejakú chvíľu a vyžadovalo použitie zopár Pytagorových viet. Preto je vhodné pozrieť sa na príklad inak. Uhlopriečka *AC* má rovnakú dĺžku ako uhlopriečka *SB*. Uhlopriečka *SB* je ale zároveň polomerom kružnice. A polomer poznáme – je to súčet dvoch dĺžok zo zadania, teda 10 cm.

Úloha 14

Postupnosť čísel vytvoríme nasledovne. Najprv si vyberieme začiatočný člen postupnosti – prirodzené číslo väčšie ako 0. Potom do postupnosti pridávame ďalšie členy podľa nasledovných pravidiel:

1. Ak je posledný člen postupnosti párne číslo, ďalší člen postupnosti bude jeho polovica.
2. Ak je posledný člen postupnosti nepárne číslo a jeho prvá cifra je párna, ďalším členom postupnosti bude posledný člen zapísaný pospiatky.
3. Ak je posledný člen postupnosti nepárne číslo a jeho prvá cifra je nepárna, ďalším členom postupnosti bude číslo o 10 väčšie.

Tento postup opakujeme. Príkladom takejto postupnosti je napríklad 51, 61, 16, 8, 4, ... Ktoré najmenšie číslo si môžeme na začiatku zvoliť, aby postupnosť nikdy neobsahovala číslo 1?

Riešenie 14

Toto je jedna z úloh, ktorej riešenie je primerane malé na to, aby sa dalo nájsť skúšaním. Dá sa síce nájsť aj priamo použitím rovníc, ale predpokladáme, že väčšina tímov šla metódou pokus-omyl. Dôležité preto je skúšať zmysluplne, ponúkajú sa najmä dve pravidlá:

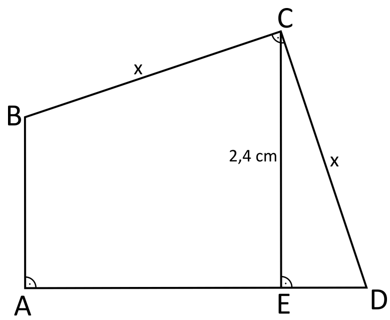
- Skúšať párne čísla je zbytočné. Ak by párne číslo nikdy neviedlo na číslo 1, to isté sa dá povedať aj o jeho polovici. Táto polovica je určite menšia a bola by teda lepším kandidátom na riešenie úlohy.
- Ak sa v postupnosti pre počiatočné číslo *N* dostaneme na číslo, ktoré sme už ako kandidáta vyškrtli, môžeme vylúčiť aj *N*.

Jednociferné čísla vieme vylúčiť ako riešenie pomerne rýchlo a postupnosti začínajúce dvojciferným číslom rýchlo vedú k číslam jednociferným. To však neplatí pre číslo 37, ktoré vedie na 47, ktoré vedie na 74, ktoré vedie naspäť na 37. Zacyklili sme sa, preto sa na číslo 1 nikdy nedostaneme. Číslo, ktoré teda hľadáme, je 37.

Úloha 15

ABCD je konvexný štvoruholník (to znamená, že všetky jeho vnútorné uhly sú menšie ako 180°). Na strane *AD* leží bod *E*. Zároveň tiež platí, že $|BC| = |CD|$ a tiež, že $|CE| = 2{,}4$ cm. Uhly *DCB*, *DAB* a *CEA* sú pravé. Aká je plocha štvoruholníka *ABCD* v cm^2?

Poznámka: Ak je treba, výsledok zaokrúhlite na 2 desatinné miesta.



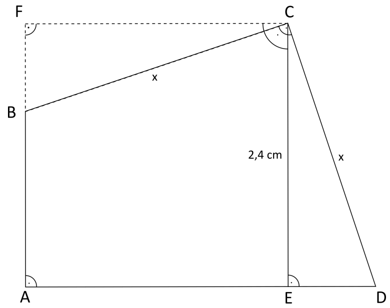
Riešenie 15

Na prvom obrázku vidíme zakreslené zadanie úlohy.

Ak si dokreslíme útvar *CEAB* na obdĺžnik *CEAF*, tak si môžeme všimnúť, že trojuholníky *CED* a *CFB* sú zhodné. Prečo je to tak?

V prvom rade, vieme, že dĺžky $|BC|$ a $|CD|$ sú rovnaké. Taktiež aj uhly *BCF* a *ECD* majú rovnakú veľkosť,

je to dôsledok toho, že uhly *BCD* aj *ECF* sú pravé. A keďže uhly *BFC* aj *CED* sú pravé, tak aj veľkosti uhlov *FBC* a *CDE* sú rovnaké.
Podľa vety uhol-strana-uhol sú teda trojuholníky *CED* a *CFB* zhodné. Majú teda aj zhodný obsah. Tiež ale platí aj $|CE| = |CF|$. *CEAF* je teda v skutočnosti štvorec.
Stačí nám teda nájsť obsah štvorca *CEAF*. To je už jednoduché, lebo jeho stranu poznáme, je to 2,4 cm. Obsah teda je 5,76 cm^2.



Úloha 16
Usain a Asafa sa dostali do olympijského finále v behu na 100 metrov, v ktorom bude bežať dokopy 8 bežcov. Koľko je rôznych poradí v cieli takých, že Usain bude vo výsledkoch pred Asafom?

Poznámka: Predpokladáme, že žiadni dvaja bežci nedosiahli rovnaký čas.

Riešenie 16
Koľko je všetkých rôznych poradí? Na prvom mieste si môžeme vyberať z 8 bežcov, na druhom zo siedmych a tak ďalej. Všetkých možných poradí teda je $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$. Finta spočíva v tom uvedomiť si, že pre každé poradie, kde je Asafa pred Usainom, existuje práve jedno poradie, kde je Usain pred Asafom – jednoducho prehodíme ich pozície. Preto poradí, v ktorých je Usain pred Asafom je presne polovica z celkového počtu, teda 20160.

Poznámka: Uznávali sme aj odpoveď $(8 \times 7)/2 = 28$, ktorá sa nepozerá na poradie ostatných bežcov.

Úloha 17
Stanka si na papier napísala trojciferné číslo. Zaň napísala to isté číslo znovu a dostala tak 6-ciferné číslo. Aký je najmenší možný počet deliteľov (vrátane 1 a čísla samotného), ktoré takto vzniknuté 6-ciferné číslo môže mať?

Riešenie 17
Stanka dostala číslo v tvare *ABCABC*. To ale môžeme zapísať ako *ABC*000 + *ABC*, teda $1000 \times ABC + ABC = 1001 \times ABC$. Minimálny počet deliteľov Stankinho čísla nastane v prípade, že *ABC* je prvočíslo. 1001 sa dá rozložiť na súčin $7 \times 11 \times 13$. Prvočísla v rozklade čísla *ABCABC* teda sú 7, 11, 13 a *ABC*. Z týchto prvočísel vieme vyskladať presne $2^4 = 16$ rôznych deliteľov Stankiného čísla.

Úloha 18

Na zhromaždenie prišlo 100 šamanov. Každý z nich je buď šťastný alebo smutný. Máme k dispozícii nasledujúce informácie:

1. Aspoň jeden z prítomných šamanov je smutný.
2. Z ľubovoľnej dvojice šamanov je aspoň jeden šťastný.

Koľko je na zhromaždení šťastných šamanov?

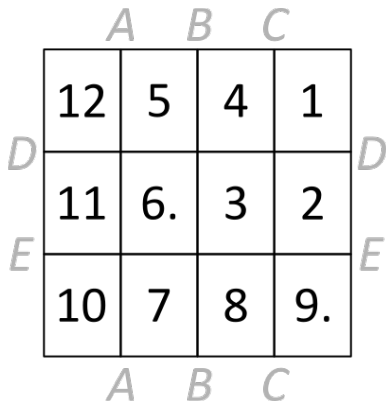
Riešenie 18

„V každej dvojici je aspoň jeden šťastný šaman“ je to isté ako „v žiadnej dvojici nie sú obaja smutní šamani“. Ak by smutní šamani boli aspoň dvaja, nutne vytvoria aspoň jednu dvojicu, kde sú obaja šamani smutní – to ale nie je možné. Smutných šamanov je teda menej ako 2. A keďže vieme, že je aspoň jeden, musí byť práve jeden. Z toho už vyplýva, že šťastných šamanov je 99.

Úloha 19

Ivan si kúpil papierovú mapu, rozložil ju, ale nepamätá si, v akom poradí ju má poskladať naspäť. V akom poradí musí vykonať skladanie pozdĺž zhybov A, B, C, D a E, aby v poskladanej mape dostal očíslované časti zhora nadol presne v poradí od 1 do 12? Číslo platí pre obe strany mapy.

Poznámka: Ako odpoveď zadajte postupnosť zhybov (napríklad EBADC), smer zhybu uvádzať nemusíte.



Riešenie 19

Prvý zhyb musí byť pozdĺž D, aby sme dostali list 2 na list 1. Ďalší zhyb musí byť pozdĺž C, aby sme dostali list 3 na list 2. List 4 už je na svojom mieste, preto ďalší zhyb (pozdĺž B) musí dostať list 5 na list 4. List 6 je už na správnom mieste a list 7 dostaneme na list 6 pomocou zhybu pozdĺž E. Tento zhyb dostane na správne miesta aj listy 8 a 9. Posledný zhyb pozdĺž A už dostane listy 10, 11 a 12 na svoje miesto.

Úloha 20

Súčin dvadsiatich piatich celých čísel je 1. Aká môže byť najmenšia hodnota súčtu týchto čísel?

Riešenie 20

Ak by sa medzi číslami nachádzala nula, súčin by bol nula, čo sa vylučuje so zadaním. Ak by ktorékoľvek číslo bolo (v absolútnej hodnote) aspoň 2, tak by aj súčin všetkých čísel bol (v absolútnej hodnote) aspoň 2. Takže medzi číslami sú len čísla 1 a -1. Keďže nás zaujíma najmenšia hodnota súčtu, chceme čo najviac čísel -1. To sa udeje vtedy, ak máme 24 čísel -1 a len jednu kladnú jednotku. Súčet týchto čísel je -23.

Úloha 21

Každé číslo má svoj „odtlačok“. Ten vypočítame tak, že prvú cifru vynásobíme jednotkou, k tomu pripočítame druhú cifru vynásobenú dvojkou, tretiu cifru vynásobenú trojkou a tak ďalej, až kým sa nám neminú cifry. Napríklad odtlačok čísla 23507 je $2 \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 3 + 0 \times 4 + 7 \times 5 = 58$. Ktoré je najmenšie prirodzené číslo s odtlačkom rovným 100?

Riešenie 21

Zistime, koľko musí mať hľadané číslo cifier. Ak by malo iba jednu cifru, tak by jeho maximálny odtlačok mohol byť $9 \times 1 = 9$. To je očividne príliš málo. Keby malo 2 cifry, tak by jeho maximálny odtlačok mohol byť $9 \times 1 + 9 \times 2 = 27$. Stále príliš málo. Pre 3 cifry: $9 \times 1 + 9 \times 2 + 9 \times 3 = 54$. Stále príliš málo. Pre 4 cifry: $9 \times 1 + 9 \times 2 + 9 \times 3 + 9 \times 4 = 90$. Stále príliš málo. Pre 5 cifier: $9 \times 1 + 9 \times 2 + 9 \times 3 + 9 \times 4 + 9 \times 5 = 135$. Päťciferné číslo by teda malo stačiť. Teraz potrebujeme, aby bol odtlačok presne 100. Aby bolo hľadané číslo čo najmenšie, potrebujeme znižovať hodnoty cifier zľava doprava. Prvú cifru môžeme zmenšiť najmenej na 1, odtlačok čísla je potom $1 \times 1 + 9 \times 2 + 9 \times 3 + 9 \times 4 + 9 \times 5 = 127$. Druhú cifru môžeme zmenšiť na 0. Potom je odtlačok $1 \times 1 + 0 \times 2 + 9 \times 3 + 9 \times 4 + 9 \times 5 = 109$. Tretiu cifru tým pádom môžeme zmenšiť ešte o 3, teda výsledné číslo je 10699.

Úloha 22

Otec chce svojim pätorčatám na narodeniny urobiť radosť nejakým chutným koláčikom, každému z detí jedným. Ale už sa naučil, že deti sa vždy pohádajú ak nedostanú buď každé rovnaký alebo každé rôzny koláčik. Išiel teda do cukrárne, kde mali aspoň päť druhov koláčikov. Všetky vyzerali chutne, preto povedal predavačke nech mu *náhodne* vyberie X koláčikov. Aké najmenšie musí byť X, aby nespôsobil hádku?

Poznámka: Zvyšné koláčiky zje otec spolu s mamou, aj oni si predsa zaslúžia dobroty.

Riešenie 22

Pripomeňme si, že cieľom je, aby pätorčatá mali buď všetky taký istý koláčik, alebo všetky úplne rôzne koláčiky. Označme si typy koláčikov A, B, C, D a E. 16 náhodne vybraných koláčikov stačiť nemusí, pretože predavačka mohla vybrať 4 koláčiky A, 4 B, 4 C a 4 D. Takúto zostavu pri najlepšej vôli nevieme rozdeliť medzi pätorčatá tak, aby boli spokojné. Sedemnásty koláčik ale už nutne bude buď piaty koláčik daného typu (a pätorčatá dostanú všetky rovnaký koláčik) alebo prvý koláčik typu E (a v tom prípade dostanú pätorčatá každé úplne iný koláčik). A rodičia budú šťastní, že im ostane $17 - 5 = 12$ koláčikov.

Úloha 23

Jožkovi na pohovore ponúkli dve možnosti vyplácania platu. Možnosť A je, že mu prvý rok vyplatia 4000 eur a každý ďalší rok mu plat zvýšia o 800 eur. Možnosť B je, že mu za prvého pol roka vyplatia 2000 eur a každých 6 mesiacov mu zvýšia plat o 200 eur. Ktorá z možností je pre Jožka výhodnejšia za predpokladu, že bude pracovať aspoň rok?

Riešenie 23

Vypočítajme si, koľko by Jožko zarobil v oboch prípadoch. Zárobky za jednotlivé roky budeme dávať do zátvoriek. Pri možnosti A by zarobil (4000) + (4800) + (5600) + (6400) + ... Pri možnosti B by zarobil

$(2000 + 2200) + (2400 + 2600) + (2800 + 3000) + (3200 + 3400) + \ldots = (4200) + (5000) + (5800) + (6600) + \ldots$

Vidíme teda, že pokiaľ by pracoval menej než pol roka, tak by možnosti A a B boli na rovnako. Akonáhle by však pracoval dlhšie, bola by pre neho výhodnejšia možnosť B.

Úloha 24

Číslo Č sa dá zapísať ako súčet siedmych bezprostredne po sebe idúcich prirodzených čísel, ale taktiež aj ako súčet ôsmych bezprostredne po sebe idúcich prirodzených čísel. Aké je najmenšie možné číslo Č?

Poznámka: Nulu nepovažujeme za prirodzené číslo.

Riešenie 24

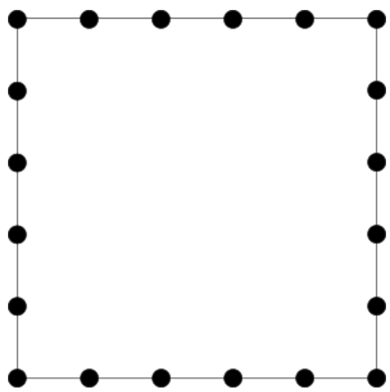
Súčet siedmych po sebe idúcich čísel zapíšeme ako $k + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) + (k + 4) + (k + 5) + (k + 6) = 7 \times k + 21 = 7 \times (k + 3)$. Hľadané číslo je teda deliteľné siedmimi.

Súčet ôsmych po sebe idúcich čísel zapíšeme ako $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)+(n+6)+(n+7) = 8 \times n + 28 = 4 \times (2n + 7)$.

Hľadané číslo je teda násobkom čísla 28 (ale nie 56, lebo v druhej rovnici sme nevedeli vyňať pred zátvorku 8, iba 4). Samotné číslo 28 nie je súčtom ôsmych po sebe idúcich prirodzených čísel, 56 nie je kandidát, ale ďalšie číslo v poradí, 84, už obe podmienky spĺňa (nájsť jednotlivé sčítance prenechávame na čitateľa).

Úloha 25

Majme štvorec so stranou 5 cm. Na každej jeho strane je 6 bodiek s pravidelnými rozostupmi 1 cm. Koľko existuje rôznych úsečiek, ktoré začínajú v jednom z týchto bodov a končia v inom z týchto bodov, ktoré majú dĺžku 5 cm?



Riešenie 25

Vodorovných úsečiek je 6. Zvislých úsečiek je taktiež 6. Potom ale nesmieme zabudnúť ešte na 8 šikmých úsečiek, ktoré vždy začínajú na jednej strane a končia na susednej strane. Tie majú dĺžku 5 cm z Pytagorovej vety, pretože $3^2 + 4^2 = 5^2$. Celkovo je teda 6 + 6 + 8 = 20 úsečiek.

Úloha 26

Kladné prirodzené čísla menšie ako 1000 sme rozdelili na tri skupiny:

1. Párne čísla skladajúce sa len z párnych cifier.
2. Nepárne čísla skladajúce sa len z nepárnych cifier.
3. Všetky ostatné čísla.

Aká je absolútna hodnota rozdielu počtov čísel v prvej a druhej skupine?

Poznámka: Cifra 0 je párna.

Riešenie 26

Pre jednociferné čísla je úloha jednoduchá – máme 5 nepárnych a 4 párne čísla.
Dvojciferné čísla z len nepárnych cifier môžu mať na prvom mieste 5 cifier (1, 3, 5, 7, 9) a na druhom tiež, je ich teda 25. Párne dvojciferné čísla z párnych cifier môžu mať na prvom mieste 4 rôzne cifry (2, 4, 6, 8) a na druhom 5 (pribudne ešte 0). To je spolu 20 čísel.
Analogicky, trojciferných nepárnych čísel s nepárnymi ciframi je $5 \times 5 \times 5 = 125$ a párnych s párnymi ciframi $4 \times 5 \times 5 = 100$. Rozdiel počtov v daných skupinách teda je $125 + 25 + 5 - 100 - 20 - 4 = 31$.

Úloha 27

Peťko potrebuje rozmeniť 100-eurovú bankovku, ktorú mu vydal bankomat. Chce ju rozmeniť na menšie peniaze, pričom k dispozícii sú 50-, 20-, 10- a 5-eurovky. Koľkými rôznymi spôsobmi dokáže rozmeniť 100-eurovú bankovku?

Riešenie 27

Využijeme to, že 5 je deliteľom čísel 10, 20, 50 aj 100. To znamená, že nech použijeme ľubovoľný počet iných bankoviek, zvyšok do stovky budeme vždy vedieť vyplatiť 5-eurovkami (počet 5-euroviek ani nepotrebujeme dopočítavať, stačí povedať „použijeme ich toľko, koľko ich je treba“).
Teraz nám stačí už len vymyslieť systém vypisovania možností. Vhodným sa ukazuje systém, kde si vypisujeme počty tak, že množstvo najväčších bankoviek postupne klesá (2×50, $50 + 2 \times 20 + 10$, $50 + 2 \times 20$, $50 + 20 + 3 \times 10$, $50 + 20 + 2 \times 10$, ...). Nezabudnime, že počet 5-euroviek je daný doplatkom do 100 a môžeme ho ignorovať, lebo je jednoznačne daný z ostatných bankoviek.
Týmto systémom môžeme prísť na to, že počet možných spôsobov je 49.

Úloha 28

Na počiatku bolo prirodzené číslo. Zobrali sme jeho cifry, každú z nich sme umocnili na druhú (vynásobili samú sebou), medzivýsledky spočítali a ešte navyše prirátali 1 – a na prekvapenie sme dostali pôvodné číslo. Nájdite najväčšie takéto prirodzené číslo.

Príklad: Číslo 24 nie je riešením, lebo $2 \times 2 + 4 \times 4 + 1 = 21 \neq 24$.

Riešenie 28

Číslo určite nebolo štvorciferné, pretože súčet druhých mocnín cifier plus 1 je najviac $4 \times 9 \times 9 + 1 = 325$, čo je primálo. Pre čísla s väčším počtom cifier je problém ešte horší.
Mohlo byť číslo trojciferné? Maximálnu hodnotu dosiahneme pre číslo 999, kde sa výsledok rovná $3 \times 9 \times 9 + 1 = 244$. To je síce málo, ale už je to trojciferné číslo – na mieste stoviek má však 2. To znamená, že pôvodné číslo muselo mať na mieste stoviek tiež cifru najviac 2. Spravme veľkorysý horný odhad a povedzme, že číslo je maximálne 299. Ak vypočítame hodnotu z neho, dostaneme $2 \times 2 + 2 \times 9 \times$

9 + 1 = 167. To je stále menej, ako pôvodné číslo. Týmto sme číslo opäť obmedzili a pôvodné číslo je teoreticky najviac 167. Tu už vidno, že trojciferné číslo s najväčším výsledkom je 159, ktoré dáva výsledok $1\times1+5\times5+9\times9+1 = 108$. Tým sme opäť obmedzili naše trojciferné číslo na maximálne 108. A už vidíme, že žiadne z týchto čísel trojciferný výsledok nedáva. Tento odsek mal za úlohu metódou postupného zosunu ukázať, že aj trojciferné čísla sú mimo hry.
Pre dvojciferné čísla organizátori nenašli iný, pre riešiteľov na druhom stupni prívetivý, spôsob riešenia, než odskúšať všetky možnosti. Najväčším takým číslom je 75.

Úloha 29
Máme nekonečnú štvorčekovú sieť. Na začiatku je v jednom políčku číslo 1, v ostatných sú nuly. Každú sekundu sa číslo v každom políčku nahradí súčtom štyroch susedných políčok. Aký bude súčet všetkých čísel na štvorčekovej sieti po 10 sekundách?

Riešenie 29
Pozrime sa na konkrétne políčko v ľubovoľnom čase. Čo sa stane o sekundu neskôr? Hodnota tohto políčka sa dostane do štyroch susedných políčok (ako súčasť celkového súčtu v susedných políčkach). Zároveň z tohto políčka zmizne, pretože hodnota políčka nemá vplyv na jeho hodnotu o sekundu neskôr (do políčka sa dostane súčet susedných štyroch políčok). To sa udeje pre každé políčko. Z toho nám vychádza jediné – každú sekundu sa súčet všetkých políčok v sieti zoštvornásobí. Na začiatku je súčet 1, po 10 sekundách je teda ich súčet $4^{10} = 1048576$.

Úloha 30
Máme číslo, ktoré neobsahuje cifru 0. Pripočítame k nemu to isté číslo, ale napísané odzadu. Tým vznikne trojciferné číslo, ktoré sa skladá len z cifier 6 a 9 (vo výslednom čísle nemusia byť nutne obe tieto cifry). Koľko rôznych čísel sme mohli mať na začiatku?

Riešenie 30
Pôvodné číslo muselo byť určite trojciferné, pretože z dvojciferných čísel vieme dostať maximálne číslo 99 + 99 = 198 a najmenšie trojciferné číslo zložené len z cifier 6 a 9 je 666. Prvá a tretia cifra výsledku musia byť rovnaké – sčítavame vždy rovnaké cifry z pôvodného čísla a k prechodu cez desiatku dôjsť nemohlo, pretože ten pridá pri sčítavaní maximálne 1, ale cifry 6 a 9 sú od seba ďalej ako 1. To znamená, že výsledkom môžu byť len čísla 666, 969, 696 a 999.
Ak je druhá cifra výsledku 6, tak nemohlo nikde prejsť k prechodu cez desiatku. Na získanie druhej cifry totiž sčítame dvakrát tú istú, strednú, cifru pôvodného čísla a dostaneme párne číslo. Prechod cez desiatku by nám ešte pridal 1, čo nechceme. Z toho je už zrejmé, že stredná cifra pôvodného čísla je 3 a súčet prvej a poslednej je menší ako 10 (6 v prípade výsledku 666 a 9 v prípade výsledku 969, súčet nemohol byť 16 ani 19). To nám dáva nasledujúce možnosti. Pre 666 bolo pôvodné číslo 135, 234, 333, 432 alebo 531. Pre 969 bolo pôvodné číslo 138, 237, 336, 435, 534, 633, 732 alebo 831. Spolu 13 možností.
Ak je druhá cifra výsledku 9, tak naopak k prechodu cez desiatku prísť muselo, pretože 9 je nepárne číslo. To ale znamená, že súčet prvej a tretej cifry by musel byť 16 alebo 19. Pri výpočte stoviek vo výsledku by sme tak preniesli jednotku až do tisícok, čo by vytvorilo štvorciferné číslo, ktoré nechceme. Ďalšie možnosti tak do zoznamu už nepridáme.

Úloha 31
Miško má drevenú kocku so stranou 30 cm, ktorú chce rovnými rezmi pílou rozrezať na 27 kociek so stranou 10 cm. Medzi rezmi môže jednotlivé časti ľubovoľne preskladať. Aký je najmenší počet rezov, ktorý musí Miško urobiť, aby kocku rozrezal?

Riešenie 31
To, že Miško môže časti medzi jednotlivými rezmi preusporiadať je síce fajn, ale ničomu to nepomôže. Zamerajme sa totiž na stredovú kocočku. Pri každom reze od tejto stredovej kocočky odrežeme najviac jednu inú kocočku, ktorá s ňou susedí (inak by rez nemohol byť rovný). To ale znamená, že rezov je treba aspoň 6, pretože stredová kocočka má 6 susedov. A na 6 rezov to ide jednoducho, časti medzi jednotlivými rezmi ani netreba preskladávať.

Úloha 32
Koľko je takých trojciferných čísel, v ktorých je cifra na mieste stoviek väčšia ako cifra na mieste jednotiek a cifra na mieste desiatok väčšia ako cifra na mieste stoviek?

Riešenie 32
Cifra na mieste stoviek nie je najmenšia a preto rozhodne nemôže byť 0. Tento okrajový prípad preto vôbec nemusíme riešiť.
Ak z cifier od 0 po 9 vyberieme tri rôzne, vieme z nich jednoznačne vyskladať číslo spĺňajúce podmienku zadania.
Preto počet takých trojciferných čísel je rovnaký ako počet možností na výber 3 rôznych cifier z desiatich možných. Prvú cifru môžeme vybrať z desiatich možností, druhú už len z deviatich a tretiu už len z ôsmych. Nesmieme ale zabudnúť na to, že postupný výber A, B, C je to isté ako výber A, C, B alebo B, A, C alebo B, C, A alebo C, A, B alebo C, B, A. Celkový počet $10 \times 9 \times 8$ ešte teda musíme vydeliť šiestimi čím dostaneme 120 možností.

Úloha 33
Lenka sa z práce zvyčajne vracia vlakom a na stanici ju o piatej vyzdvihne Dan, ktorý ju odvezie domov. V jeden deň však skončila s prácou skôr a chytila rovnaký, ale o hodinu skorší vlak. Vybil sa jej telefón, tak o tom Danovi nemohla napísať. Keďže bolo pekne, rozhodla sa Lenka ísť peši Danovi naproti a keď ho stretla, nasadla do auta a šli domov. Domov dorazili o 10 minút skôr ako obyčajne. Koľko minút šla Lenka peši?

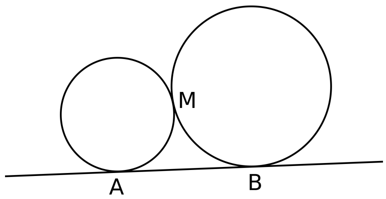
Riešenie 33
Pozrime sa na situáciu nie z pohľadu Lenky, ale z pohľadu Dana. Ten sa tiež domov vráti o 10 minút skôr, než zvyčajne. To znamená, že na tej časti cesty od miesta, kde vyzdvihol Lenku po stanicu a naspäť, ktorú nemusel absolvovať, ušetril 10 minút. Teda jedným smerom ušetril 5 minút. To znamená, že Lenku nabral do auta 5 minút predtým, než počas normálneho dňa. Takže Lenka musela ísť peši 60 minút (čas, o ktorý prišla skôr ako obyčajne) – 5 minút (ušetrený čas), teda 55 minút.
Všimnite si, že pri úlohe nepotrebujeme poznať rýchlosti Dana a Lenky, ba ani nepotrebujeme predpoklad, že by obaja išli rovnomernou rýchlosťou

Úloha 34
Koľko je rôznych kladných prirodzených čísel k takých, že súčet $1! + 2! + 3! + ... + k!$ je druhou mocninou prirodzeného čísla?

Poznámka: Faktoriál prirodzeného čísla n (zapisujeme $n!$) vypočítame ako súčin všetkých prirodzených čísel od 1 po n, t.j. $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

Riešenie 34
Vypíšme si prvých pár hodnôt a zamerajme sa na poslednú cifru výsledného čísla. Pre $n = 1$ máme výstup $1! = 1$ (riešenie), pre $n = 2$ máme výstup $2! + 1! = 2 \times 1 + 1 = 3$. Pre $n = 3$ máme výstup $3! + 2! + 1! = 3 \times 2 \times 1 + 2 \times 1 + 1 = 9$ (riešenie). Pre $n = 4$ máme výstup $4! + 3! + 2! + 1! = 33$. Pre $n = 5$ máme výstup $5! + 4! + 3! + 2! + 1! = 153$. Všimnime si, že člen $5!$ je deliteľný desiatimi (má v rozklade aj číslo 5, aj číslo 2), a preto nemení poslednú cifru v porovnaní s predchádzajúcim členom. To isté však môžeme povedať o všetkých ďalších faktoriáloch (väčších ako 5) – vždy budú deliteľné desiatimi, preto budú končiť nulou a poslednú cifru súčtu nezmenia. Pre $n \geq 5$ je teda posledná cifra súčtu vždy 3. No a druhá mocnina prirodzeného čísla nikdy nekončí cifrou 3 (posledné cifry sú 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, a táto sekvencia sa stále opakuje). Preto jediné dve riešenia sú tie, ktoré sme našli na začiatku ($n = 1$ a $n = 3$).

Úloha 35
Na priamke máme dva body A a B. Nakreslíme dve kružnice tak, aby sa prvá kružnica dotýkala priamky v bode A, druhá sa dotýkala priamky v bode B a zároveň sa obe kružnice dotýkali v bode M. Keby sme si nakreslili body M pre všetky možné dvojice kružníc, ktoré spĺňajú zadanie, na akom útvare by tieto body ležali? A) na priamke, B) na obvode štvorca, C) na kružnici alebo D) na obvode trojuholníku?



Riešenie 35
Do obrázka si dokreslime spoločnú dotyčnicu kružníc. Tá pretne priamku AB v bode S. Vzdialenosť $|SA|$ je rovnaká ako $|SM|$, pretože priamky SA a SM sú dotyčnicami vedenými z toho istého bodu k prvej kružnici. Podobne platí aj $|SM| = |SB|$. S je teda stredom úsečky AB. Zároveň, nech bod M je kdekoľvek, dĺžka $|SM|$ je polovicou dĺžky $|AB|$, a teda konštantná. Takže ešte raz – body A a B sú dané, teda aj bod S je daný. Bod M sa síce môže hýbať, ale vieme, že vzdialenosť $|SM|$ je konštantná. Je teda polomerom a všetky možné body M ležia na kružnici.