Vzorové riešenia MatX 2016

matx.p-mat.sk

10. februára 2016

Úloha 1
Každý zo znakov “#” vymeníme buď za znamienko “+” alebo “×”, aká je najmenšia možná hodnota výrazu 1 # 2 # 3 # 4 # 5 # 6 # 7 # 8 # 9?
Riešenie 1
Pozrime sa na najprv možnosť, kedy by sme všetky znaky “◦” zamenili za “+”. Hodnota výrazu 1 # 2 # 3 # 4 # 5 # 6 # 7 # 8 # 9 by v tomto prípade bola 45. Môžeme niektorý znak “+” zameniť za “×” tak, aby sme hodnotu výrazu znížili? Ak nahradíme $1 + 2$ vo výraze 1×2, celková hodnota výrazu sa zníži o jeden, pretože 1×2 je o jeden menej ako $1 + 2$. V prípade všetkých ďalších dvojíc však súčin bude vždy vyšší ako súčet, takže nahradením “+” za “×” celkovú hodnotu výrazu zvýšime.

Podobne je to pri nahrádzaní znamienok v trojiciach: zamenením dvoch po sebe idúcich “+” za “×” celkovú hodnotu výrazu nikdy neznížime. Toto platí aj pre štvorice, pätice, a tak ďalej. Takže okrem zámeny $1 + 2$ za 1×2 nikde inde nemôžeme zameniť “+” za “×” tak, aby sme hodnotu výrazu znížili. Najmenšia možná hodnota výrazu teda je $1 \times 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44$.

Úloha 2
Za písmená A, B, C, D Peťko dosadil niektoré z číslic od 1 do 9 tak, že platilo: AAAA + BBB + CC + D = 2016. Aký je súčin číslic A, B, C, D? Pozn.: Zápis AAAA znamená štvorciferné číslo, v ktorom je tá istá cifra štyrikrát po sebe. Teda napríklad keby Peťko za A dosadil 3, AAAA by znamenalo 3333.
Riešenie 2
Hodnota A musí byť určite 1. Keby bola 2 alebo viac, ako výsledok by sme nemohli 2016, pretože 2222 je viac ako 2016 a čísla BBB, CC a D sú kladné. Hodnota B musí byť 8. Keby bola 9, celkový súčet by bol aspoň 2110, čo je viac ako 2016. Keby B bolo 7, AAAA + BBB by sa rovnalo 1888. Aj keby C a D boli najväčšie možné, teda 99 a 9, celkový súčet by bol stále menej ako 2016. Takže B = 8. Náš doterajší súčet je $1111 + 888 = 1999$. Hodnota C musí byť 1, pretože ak by C bolo 2 a viac, dostali by sme súčet väčší než 2016. D je teda 6. Súčin ABCD je teda $1 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 6 = 48$.

Úloha 3
Kocku s hranou dĺžky 10 cm rozrežeme na 8 kociek s hranou 5 cm. Povrch všetkých menších kociek dohromady bude väčší než povrch pôvodnej kocky. O koľko cm^2 väčší bude?
Riešenie 3
Povrch kocky s hranou dĺžky 10 cm je $6 \cdot 10 \cdot 10 = 600\ cm^2$. Povrch menšej kocky s hranou dlhou 5 cm je $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150\ cm^2$. Menších kociek je 8, teda ich celkový povrch je $8 \cdot 150 = 1200\ cm^2$. To je o $600\ cm^2$ viac než povrch pôvodnej kocky.

Úloha 4

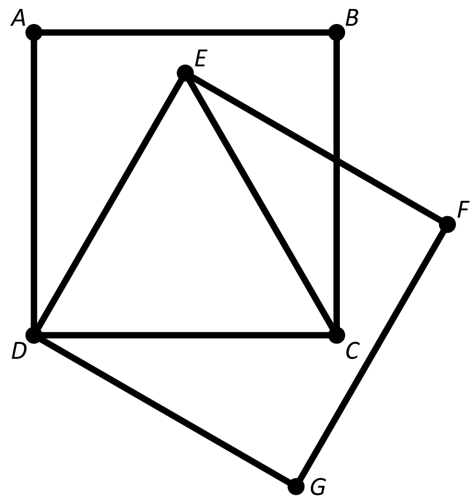
Mirko sedel na prednáške o postupnostiach, ale všetko už vedel, a tak si začal písať svoje vlastné postupnosti. Začal číslom 128. Z neho odvodil ďalší člen postupnosti takto: 8 × 8 + 5 = 69. Potom pokračoval rovnakým spôsobom a z čísla 69 dostal 9 × 9 + 5 = 86. Vždy teda získa ďalší člen postupnosti nasledovne: najskôr z predchádzajúceho člena postupnosti vezme cifru na mieste jednotiek. Tú vynásobí so sebou samou a k výsledku pripočíta číslo 5. Aké číslo je na 2016. mieste tejto postupnosti?

Riešenie 4

Mirkova postupnosť začínala: 128, 69, 86, 41, 6, 41, 6, 41, 6, ... V postupnosti sa ďalej opakovali len čísla 41 a 6, tak, že číslo 6 sa vyskytovalo vždy na nepárnych pozíciách (teda ako piate, siedme, deviate atď.) a číslo 41 sa vyskytovalo vždy na párnych pozíciách (teda ako šieste, ôsme, desiate atď.). 2016 je párne, takže na 2016. pozícii sa muselo nachádzať číslo 41.

Úloha 5

Na obrázku je rovnostranný trojuholník *CDE*. *ABCD* a *DEFG* sú štvorce. Koľko stupňov má uhol *GDA*?



Riešenie 5

Uhol *CDE* má veľkosť 60°, pretože *CDE* je rovnostranný trojuholník. Uhol *GDE* má veľkosť 90°, pretože *EFGD* je štvorec. Z toho vyplýva, že veľkosť uhla *GDC* je $|GDE| - |CDE| = 90° - 60° = 30°$. Uhol *CDA* je pravý. Veľkosť uhla *GDA* je teda $|GDC| + |CDA| = 30° + 90° = 120°$.

Úloha 6

Nájdite štvorciferné číslo, ktoré spĺňa všetky nasledujúce vlastnosti:

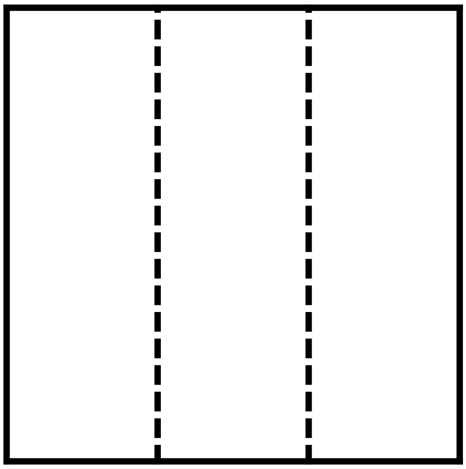
- číslo nesmie obsahovať nulu,
- prvá cifra čísla je štvornásobkom poslednej cifry,
- druhá cifra čísla je o jedna väčšia než prvá cifra,
- druhá cifra je trojnásobkom tretej cifry.

Riešenie 6

Posledná cifra môže byť iba 1 alebo 2. Štvornásobok väčšieho čísla by už totiž nebolo jednociferné číslo a teda nebola by to cifra. Nech je posledná cifra 1. Potom je prvá cifra 4, druhá cifra 5. Tretia cifra by však v tomto prípade nebola prirodzené číslo, takže túto možnosť môžeme vylúčiť. Posledná cifra je teda 2. Tým pádom je prvá cifra 8, druhá 9 a tretia 3. Výsledok je 8932.

Úloha 7

Štvorec rozstrihneme na tri obdĺžniky. Rozstrihneme ho pozdĺž dvoch úsečiek rovnobežných k strane štvorca, ako na obrázku. Obvod každého obdĺžnika je 24 cm. Aký obsah v cm^2 mal pôvodný štvorec?



Riešenie 7

Označme si dĺžku strany štvorca a. Potom je dĺžka obvodu každého z obdĺžnikov $2a+2a/3 = 8a/3$, pretože všetky majú rovnako veľký obvod, teda musia mať rovnako dlhú kratšiu stranu. Zároveň vieme, že dĺžka tohto obvodu je 24 cm, teda $8a/3 = 24$, teda $a = 24 \cdot 3/8 = 9$. Obsah štvorca je potom $9 \cdot 9 = 81$.

Úloha 8

Na stole leží koláč v tvare obdĺžnika s rozmermi 42 × 70 cm. Anička si povedala, že ho musí rozdeliť na rovnaké kúsky tak, aby to boli čo najväčšie štvorce. Akú dĺžku strany v cm bude mať každý kúsok? Pozn.: dĺžka strán štvorcových kúskov musí byť celé číslo.

Riešenie 8

Potrebujeme, aby dĺžka aj šírka celého koláča bola deliteľná dĺžkou strany štvorca a aby dĺžka strany štvorca bola čo najväčšia. Hľadáme teda najväčší spoločný deliteľ čísel 14 a 72, čo je 14.

Úloha 9

Päťdesiat žiakov písalo test z matematiky. Priemerný počet bodov bol 68 bodov. Desať najlepších žiakov dosiahlo 100 bodov. Aký je priemerný počet bodov zvyšných štyridsiatich žiakov?

Riešenie 9

Celkový súčet bodov všetkých žiakov je $68 \cdot 50 = 3400$. Súčet bodov najlepších 10 žiakov je $100 \cdot 10 = 1000$, takže súčet bodov zvyšných žiakov je 2400. Bodový priemer zvyšných štyridsiatich žiakov je teda $2400/40 = 60$.

Úloha 10

V triede sa po španielsky učia dve tretiny dievčat a polovica chlapcov. V triede je dvakrát toľko chlapcov ako dievčat. Aká časť triedy sa učí po španielsky?

Riešenie 10

Z druhej vety zadania vieme, že v triede sú 2/3 chlapci a 1/3 dievčatá. Z chlapcov sa učí španielsky 1/2, teda 1/3 celkového počtu detí. Z dievčat sa učia španielsky 2/3, teda $2/3 \cdot 1/3 = 2/9$ celkového počtu detí. $2/9 + 1/3 = 2/9 + 3/9 = 5/9$.

Úloha 11

Súčin cifier dnešného Andrejovho veku je rovnaký ako pred šiestimi rokmi a nerovná sa nule. Andrejov vek je zároveň najmenší možný vek s týmito dvoma vlastnosťami. O koľko rokov najbližšie bude súčin cifier Andrejovho veku znova taký istý ako dnes?

Riešenie 11

Aby tento jav mohol nastať, musí Andrejov vek v priebehu daných šiestich rokov prejsť cez násobok desiatky. Keby to tak nebolo, rovnosť ciferných súčinov by nemohla nastať, pretože ciferné súčiny v rámci desiatky iba stúpajú. Andrej teda mohol počas posledných zo šiestich narodenín mať 11, 12, 13, 14 alebo 15. Ani jedno z tohto však nevychádza. Vyskúšajme 21, 22, 23, 24, 25. Pre 24 nachádzame zhodu, pretože $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$. Zostáva teda nájsť najmenšie také číslo, ktoré je väčšie než 24 a má opäť ciferný súčin 8. Ako sme už povedali, nemôže to byť už žiadny ďalší vek v jeho dvadsiatych rokoch. Nemôže to byť ani vek v jeho tridsiatych rokoch, pretože 8 nie je deliteľné 3. Ďalej už ľahko nájdeme vek 42, ktorý má ciferný súčin 8. Taktiež sme ukázali, že menší taký vek (väčší než 24) neexistuje. 42 rokov bude Andrej mať o $42 - 24 = 18$ rokov.

Úloha 12

V Kocúrkove chcú vymeniť na všetkých domoch ich popisné čísla. Domy budú očíslované postupne začínajúc od 1. Starosta Kocúrkova, pán Pazúrik, chce nové čísla na domy vyskladať z tabuliek s jednotlivými ciframi. Vypočítal, že takýchto tabuliek potrebuje presne 999. Koľko domov je v Kocúrkove?

Riešenie 12

Na označenie domov s adresnými číslami od 1 po 9 potrebuje starosta 9 tabuliek (na každý dom jednu). Na označenie domov s číslami od 10 po 99 je potrebných $2 \cdot 90 = 180$ tabuliek (na každý dom dve). Na označenie domov s trojcifernými adresnými číslami teda starostovi ostáva $999 - 189 = 810$ tabuliek, pričom od čísla 100 po nejaké posledné číslo n starosta spotrebuje $3 \cdot (n - 99) = 3n - 297$ tabuliek (na každý dom tri). Riešením $810 = 3n - 297$ je $n = 369$, tabuľky teda vystačia na očíslovanie domov po číslo 369.

Úloha 13

Karol sa narodil v dvadsiatom storočí. Na narodeniny tento rok (2016) si niečo všimol: jeho súčasný vek je trojnásobkom posledného dvojčíslia roku jeho narodenia. V ktorom roku sa Karol narodil?

Riešenie 13

Označme si rok narodenia Kala x. Jeho súčasný vek je teda $2016 - x$. Keďže sa Karol narodil v 20. storočí, posledné dvojčíslie jeho roku narodenia získame ako $x - 1900$. Vzťah zo zadania teda vyjadríme ako $2016 - x = (x - 1900) \cdot 3$. Upravením získame rok Karlovho narodenia $x = 1929$.

Úloha 14

Babka a jej vnučka Barunka majú narodeniny v rovnaký deň. Pri šiestich po sebe idúcich oslavách narodenín bol babkin vek vždy deliteľný vekom Barunky. Koľké narodeniny oslavovala babka na poslednej z týchto šiestich osláv? Babka nemá viac ako 100 rokov.

Riešenie 14

Vek Barunky mohol byť pri prvej oslave buď 1 rok alebo ľubovoľné iné číslo. Ak by vek vnučky nebol 1 rok, babička by musela mať v každom roku neprvočíselný vek. Toto platí preto, že prvočíslo je deliteľné len jednotkou a sebou samým, takže keby babička mala prvočíselný vek, jej vek by nemohol byť deliteľný vekom vnučky, iba keby mala vnučka rovnako rokov ako ona (čo je nezmysel) alebo 1 rok. Ak mala vnučka pri prvej oslave 1 rok, babička mohla mať tento rok prvočíselný vek. Počas ostatných rokov by už však musela mať neprvočíselný vek.

Overme si najskôr prvú možnosť. Aby platila, museli by sme nájsť 6 po sebe idúcich zložených čísel (teda čísel, ktoré nie sú prvočísla). Ak si vypíšeme všetky prvočísla od 2 po 100, zistíme, že taká šestica čísel neexistuje.

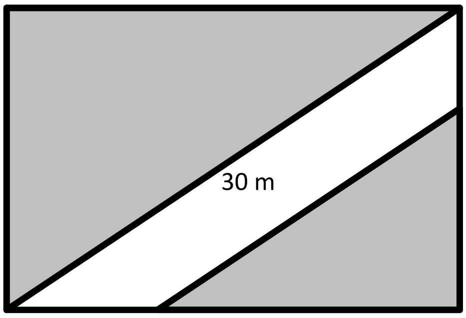
Platiť teda musí druhá možnosť a Barunka má pri prvých narodeninách 1 rok. Babička vtedy bude mať prvočíselný vek a počas ostatných narodenín neprvočíselný. Intervaly, kde sa nachádza päť po sebe idúcich zložených čísel sú tieto: 23–29, 31–37, 53–59, 61–67, 73–79 a 91–97.

Tak, aby druhé číslo v šestici bolo deliteľné dvojkou nám zostávajú: 23–28, 31–36, 53–58, 73–78 a 91–96. Prvé číslo šestice bude jednotkou deliteľné vždy. Tretie číslo je deliteľné už len v nasledujúcich šesticiach: 31–36, 61–67 a 91–97.

Z týchto šestíc je štvrté číslo je deliteľné štvorkou jedine v 61–67. Zostáva nám teda už len overiť či 65 je deliteľné 5 (áno) a 66 deliteľné 6 (áno). Babička teda na poslednej z šiestich osláv mala 66 rokov.

Úloha 15

Pán Šmik mal záhradu veľkú 432 m^2. Nová cesta, ktorú v obci postavili, pretína záhradu tak, ako vidíte na obrázku. Jedna jej strana, dlhá presne 30 metrov, tvorí uhlopriečku obdĺžnikovej záhrady. Zostávajúce časti záhrady majú pomer plôch 4:9. Pán Šmik obci predal pozemok pod novou cestou. Za každý predaný m^2 dostal pán Šmik 3 eurá. Koľko eur dostal pán Šmik za pozemok pod novou cestou?



Riešenie 15

Väčší trojuholník zaberá presne polovicu plochy obdĺžnikovej záhrady, takže musí mať plochu 432/2 = 216 m^2. O spodnom (menšom) trojuholníku vieme, že pomer jeho plochy k veľkému trojuholníku je 4:9, teda plocha menšieho trojuholníku musí byť $4/9 \cdot 216 = 96$ m^2. Celková plocha trojuholníka je teda 216 + 96 = 312 m^2. Plocha cesty je teda 432 – 312 = 120 m^2. Pán Šmik teda za pozemok dostal $120 \cdot 3 = 360$ eur.

Úloha 16

Nájdi najmenšie prirodzené číslo deliteľné 9, ktoré má len párne cifry. Pozn.: Nulu za prirodzené číslo nepovažujeme.

Riešenie 16

Na riešenie použijeme pravidlo pre deliteľnosť deviatimi: číslo je deliteľné deviatimi vtedy a len vtedy, ak je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. Najmenší možný ciferný súčet deliteľný deviatimi je 9. Pokiaľ by by však číslo malo tento ciferný súčet, nemohlo by byť zložené len z párnych cifier (pretože súčet párnych čísel je párny). Tým pádom sa musíme pozrieť na druhý najmenší možný ciferný súčet deliteľný deviatimi: 18. Jediné dvojciferné číslo s týmto ciferných súčtom je 99, to však nemá párne cifry. Musíme teda uvažovať trojciferné čísla.

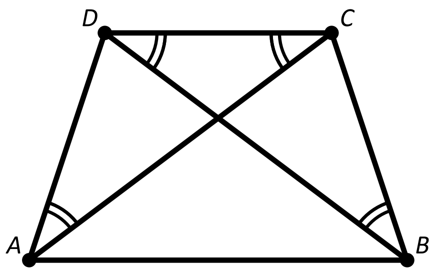
Čísla v rozmedzí 100–199 môžeme rovno zahodiť, pretože majú jednu nepárnu cifru: 1. Zostáva nájsť najmenšie číslo väčšie ako 200 s ciferným súčtom 18. Pretože už obsahuje cifru 2, súčet zvyšných cifier musí byť 16. Najmenšie také číslo je 279, to však nemá párne cifry. Druhé najmenšie je 288, ktoré už má všetky cifry párne. Najmenšie prirodzené číslo deliteľné deviatimi, ktoré má len párne cifry je teda 288.

Úloha 17

V rovnoramennom lichobežníku *ABCD*, kde *AB* je rovnobežné s *CD*, platí, že $|AD| = |CD|$. Uhol *DBC* má veľkosť 35°. Koľko stupňov má uhol *ADB*?

Riešenie 17

$|AD| = |CD|$. Z toho automaticky vyplýva, že $|AD| = |CD| = |BC|$, pretože sa jedná o rovnoramenný lichobežník. Z toho vyplýva, že uhly $|DBC| = |CDB|$ (pretože *BCD* je rovnoramenný trojuholník). Ďalej z rovnakého dôvodu platí, že $|CAD| = |ACD|$. Tiež ale platí, že $|CDB| = |ACD|$, pretože lichobežník je rovnoramenný.



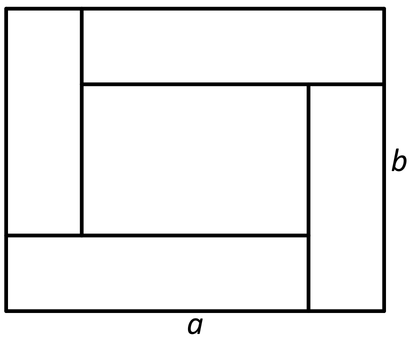
V trojuholníku *ACD* teda poznáme uhly *ACD*, *CDB* a *DAC*. Nepoznáme jedine uhol *ADB*. Vieme však, že súčet uhlov v trojuholníku je vždy 180°. Preto platí, že $|ACD| + |CBD| + |ADB| + |CAD| = 180°$, teda $35° + 35° + |ADB| + 35° = 180°$. Z toho už vyplýva, že $|ADB| = 75°$.

Úloha 18

Dĺžka obdĺžnikovej záhrady je o 7 m väčšia ako jej šírka. Keď sme v záhrade po celom obvode postavili chodník so šírkou 1 m, jej plocha sa zmenšila o 50 m^2. Aké sú rozmery záhrady v metroch? Rozmery zadajte zoradené vzostupne.

Riešenie 18

Označme si dĺžku písmenom *a*, šírku písmenom *b*. Zo zadania vieme, že $a = b + 7$. Zároveň tiež vieme spočítať plochu chodníkov. Rozdeľme si ich na 4 obdĺžniky ako na obrázku.



Všetky majú šírku 1 m. Celková plocha chodníkov je teda $(b-1)\cdot 1\cdot 2+(a-1)\cdot 1\cdot 2 = 2b-2+2a-2 = 2a+2b-4$. Zo zadania vieme, že plocha chodníkov je 50 m^2, teda $2a+2b-4 = 50$. Upravíme na $a+b = 27$. Dosadením $a = b+7$ získame: $b+7+b = 27$, teda $b = 10$. Z toho vyplýva, že $a = 17$. Rozmery záhrady sú teda 10×17.

Úloha 19
Koľko čísel od 0 po 999 obsahuje aspoň jednu číslicu 5?

Riešenie 19
Všetky stovky sa z hľadiska množstva pätiek chovajú rovnako, s výnimkou 500–599. V piatej stovke bude automaticky 100 čísel s päťkou. Tým máme túto stovku vyriešenú. Vo všetkých ostatných stovkách budú nasledujúce čísla s päťkou: s05, s15, s25, s35, s45, s65, s75, s85, s95, kde s je stovková cifra. To je spolu 9 čísel. Potom ale ešte musíme pričítať 10 čísel s50–s59. V každej stovke (s výnimkou piatej stovky) teda bude 19 čísel s päťkou. Celkovo ich teda v danom intervale bude $9 \cdot 19 + 100 = 271$.

Úloha 20
Anička si v obchode vybrala sandále za 40 €. Majiteľovi obchodu, pánovi Kaštánkovi, za ne zaplatila päťdesiateurovou bankovkou. Pán Kaštánek nemal drobné, tak zašiel vedľa k pánovi Kyselému a ten mu päťdesiatku rozmenil na 5 desiatok. Pán Kaštánek sa vrátil a zákazníčke vrátil 10 €, počom spokojne aj s topánkami odišla. Pán Kyselý sa po chvíľke vrátil s tvrdením, že päťdesiateurovka bola falošná a žiadal za ňu náhradu. Pán Kaštánek mu vyhovel a dal mu 50 €. Akú stratu v eurách utrpel pán Kaštánek?

Riešenie 20
Pán Kaštánek určite prišiel minimálne o 40 eur, pretože nedostal zaplatené za topánky v tejto cene. Pozrime sa, ako to bolo s ďalšími peniazmi, o ktoré prišiel. Predstavme si, že pán Kyselý, ktorý mu rozmenil falošnú päťdesiatku za 5 desaťeuroviek, by si na každú z týchto desaťeuroviek napísal fixou bodku. Pán Kaštánek by sa potom vrátil a 10 eur (s bodkou) by vydal Aničke. O chvíľu by prišiel pán Kyselý a chcel by naspäť 50 eur. Pán Kaštánek by mu teda vrátil 40 eur s bodkami, ale ešte by musel doplatiť vlastných 10 eur (bez bodky). Tým pádom stratil pán Kaštánek spolu 50 eur.

Úloha 21
Na obrázku je magický štvorec, teda taký štvorec, že súčet čísel v každom z jeho riadkov, stĺpcov a uhlopriečok je rovnaký. Aké sú hodnoty čísel v, w, x, y a z (v tomto poradí)?

v	24	w
18	x	y
25	z	21

Riešenie 21
Aby platili podmienky zo zadania, musí platiť, že $25 + z + 21 = 24 + x + z$. Úpravou dostaneme, že $x = 22$. Keď už poznáme x, môžeme použiť vzťah $18+x+y = w+y = 21$, ktorý upravíme na $18+22+y = w+y+21$, z čoho získame $w = 19$. Teraz už vieme, aký je súčet na uhlopriečke: $25+22+19 = 66$. Ľahko teda zistíme zvyšné hodnoty: $v = 66 - 18 - 25 = 23$, $z = 66 - 24 - 22 = 20$ a $y = 66 - 18 - 22 = 26$. Odpoveď je teda v správnom poradí: $v = 23$, $w = 19$, $x = 22$, $y = 26$, $z = 20$.

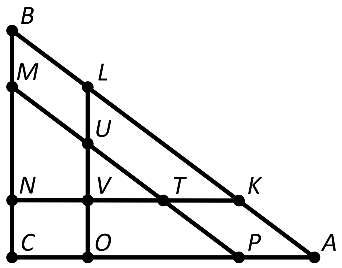
Úloha 22
Leo povedal: „Presne tretina hrán môjho kvádra má dĺžku inú ako 5 cm. Presne tretina stien môjho kvádra má obsah iný ako 40 cm^2." Aký objem v cm^3 mal tento Leov kváder?

Riešenie 22
Presne tretina hrán (teda $12/3 = 4$ hrany) má inú dĺžku než 5 cm. Z toho vyplýva, že 8 hrán má dĺžku 5 cm. Keďže na natočení kvádra nezáleží, nech je šírka a výška kvádra rovná 5 cm. Z toho tiež vyplýva, že 2 steny majú obsah 25 cm^2. Presne tretina stien (teda $6/3 = 2$ steny) má obsah iný než 40 cm^2, teda

4 steny majú obsah 40 cm^2. Pretože už poznáme šírku a výšku, zostáva zistiť len hĺbku, ktorá sa teda musí rovnať 40/5 = 8 cm. Objem je teda $5 \cdot 5 \cdot 8$ cm^3 = 200 cm^3.

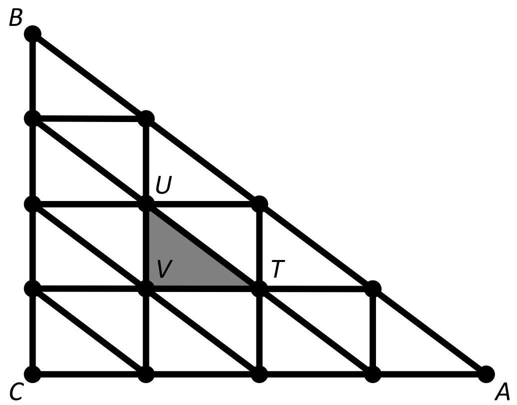
Úloha 23

V pravouhlom trojuholníku *ABC* s pravým uhlom pri vrchole *C* sú na stranách *AB*, *BC*, *CA* dané postupne dvojice bodov *K*, *L* a *M*, *N* a *O*, *P*. Pritom platí: $|AK| = |LB| = \frac{1}{4}|AB|$, $|BM| = |NC| = \frac{1}{4}|BC|$, $|CO| = |PA| = \frac{1}{4}|CA|$. Priamky *KN*, *MP*, *OL* ohraničujú trojuholník *TUV* s celočíselnými dĺžkami strán. Obsah trojuholníka *TUV* je 6cm^2. Aký je obvod trojuholníka *ABC* v cm?



Riešenie 23

Obsah trojuholníka *TUV* je 6 cm^2. Pretože je pravouhlý, jeho obsah získame $|UV| \cdot |VT|/2$. Pretože *UV* aj *VT* sú celočíselné, jediné možné kombinácie *UV* a *VT* sú 1, 12; 2, 6 a 3, 4 (hoci máme aj možnosti 4, 3; 6, 2 a 12, 1, tie neuvažujeme, pretože sú také isté ako tie prvé tri, iba otočené o 90 stupňov). Z Pytagorovej vety vieme, že v prípade 1, 12 aj 2, 6 by tretia strana nemala celočíselnú dĺžku. Tým pádom dĺžky strán trojuholníka *TUV* sú 3, 4 a 5.



Dokreslime si do obrázku spojnice tak, ako na obrázku. Teraz vidíme, že strany trojuholníka *ABC* sú štyrikrát dlhšie než strany trojuholníka *TUV*. Pretože trojuholník *TUV* má obvod 3+4+5 = 12, trojuholník *ABC* bude mať obvod $4 \cdot 12 = 48$.

Úloha 24

Nazvime číslo šikovné, pokiaľ je treťou mocninou alebo ak sa dá zapísať ako súčet menej než deviatich tretích mocnín kladných celých čísel. Napríklad číslo 12 je šikovné, pretože sa dá zapísať ako $2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$. Nájdite najmenšie kladné celé číslo, ktoré nie je šikovné. Poznámka: Tretia mocnina čísla je toto číslo trikrát vynásobené samo so sebou; napríklad tretia mocnina čísla 5 je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.

Riešenie 24

Čísla 1–8 sú určite šikovné, pretože sa dajú zapísať ako súčet jednej až ôsmich tretích mocnín čísla 1 (napríklad $5 = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$). Osem sa dá navyše zapísať aj ako 2^3. Tým pádom sú však šikovné čísla aj 9–16, pretože sa dajú zapísať ako 2^3 plus jedna až sedem tretích mocnín jednotky. 16 sa dá navyše zapísať aj ako $2^3 + 2^3$. Tým pádom sú šikovné aj čísla 17–22, pretože sa dajú zapísať ako súčet dvoch tretích mocnín dvojky a súčet jednej až šiestich tretích mocnín jednotky.

Číslo 23 však už šikovné nie je, pretože $2^3 + 2^3 + 2^3 = 8 + 8 + 8 = 24$ a 3^3 nám nepomôže, pretože to je 27. Odpoveď je teda 23. Poznámka: Jediné ďalšie číslo, ktoré nie je šikovné, je číslo 239. Všetky ostatné prirodzené čísla sú šikovné!

Úloha 25

Miško do štvorca 3 × 3 napísal deväť čísel: 7, 10, 13, …, 31. Miško čísla napísal tak, že súčet čísel v každom riadku a v každom stĺpci štvorca bol taký istý. Aká bola hodnota tohto súčtu?

Riešenie 25

Čísla, ktoré Michal zapísal do štvorca sú 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31. Nech ich Michal zapísal do štvorca akokoľvek, nás to našťastie nemusí pre vyriešenie úlohy zaujímať. Pokiaľ totiž sčítame všetky čísla vo štvorci, musíme dostať rovnaký súčet, ako keď sčítame hodnoty troch riadkov alebo troch stĺpcov. Vo všetkých prípadoch sme totiž sčítali všetky čísla, akurát v inom poradí.

Nech je súčet čísel v každom riadku a stĺpci rovný A. Potom platí, že $3A = S$, kde S je súčet všetkých čísel vo štvorci. Takže $A = (7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31)/3 = 57$.

Úloha 26

Koľko je medzi číslami od 1 po 10000 takých, ktoré nie sú deliteľné ani 13, ani 51?

Riešenie 26

Spočítajme si radšej čísla, ktoré sú deliteľné buď 13, alebo 51 a ich počet odčítajme od 10000. Koľko je čísel medzi 1 a 10000 deliteľných 13? Je ich 10000/13 zaokrúhlené nadol. Zaokrúhľujeme nadol preto, že ak nevyjde celé číslo, znamená to, že k ďalšiemu násobky 13 sme sa ešte nedostali a teda ho nesmieme započítať. Napríklad keby sme mali spočítať počet čísel deliteľných 13 medzi 1 a 25, tak $25/13 \approx 1{,}923$, čo po zaokrúhlení nadol dáva 1. Podobne počet čísel deliteľných 13 medzi 1 a 10000 je $10000/13 \approx 769{,}231 \to 769$. Podobne dostaneme, že počet čísel deliteľných 51 od 1 do 10000 je $10000/51 \approx 196{,}078 \to 196$.

Pozor, ešte sme ale neskončili. Čísla deliteľné aj 13 aj 51 sme totiž započítali dvakrát! Jedná sa o čísla, ktoré sú aj 13 aj 51, teda čísla deliteľné najmenším spoločným násobkom 13 a 51, teda $13 \cdot 51 = 663$. Čísel deliteľných 663 je $10000/663 \approx 15{,}083 \to 15$. Čísel spĺňajúcich podmienku zo zadania je teda: $10000 - (769 + 196 - 15) = 9050$.

Úloha 27

Na oslave je 7 žien a 5 mužov. Pri prípitku si pohármi štrngnú navzájom všetci muži a každá žena si štrngne pohárom s každým mužom. Ženy si pohármi navzájom neštrngnú. Koľko štrngnutí sa uskutoční?

Riešenie 27

Štrngnutia pohármi môžeme rozdeliť do dvoch skupín: 1) štrngnutia medzi ženou a mužom 2) štrngnutia medzi dvoma mužmi. Prvého typu štrngnutí nastalo $5 \cdot 7 = 35$, pretože každá žena si štrngla s každým mužom.

Druhého typu štrngnutí nastalo $5 \cdot 4/2 = 10$. To preto, že mužov je 5, každý si štrngol so 4 zvyšnými mužmi, ale takto sme každé štrngnutie započítali dvakrát, takže počet je potrebné ešte vydeliť dvoma. K počtu druhého typu štrngnutí sa dá dostať aj takto: Pomenujme mužov A, B, C, D, E. Štrngnutia boli nasledovné: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE a DE, teda opäť vyšlo 10.

Celkový počet štrngnutí bol teda 35 + 10 = 45.

Poznámka: K riešeniu sa dá dostať aj pomocou obrázku, kde muži a ženy sú bodky, a štrngnutia sú znázornené čiarou spájajúcou dve bodky. Potom stačí iba nakresliť všetky čiary podľa zadania a spočítať ich.

Úloha 28

Kocka veľkosti 4 × 4 × 4 je poskladaná z 32 bielych a 32 čiernych kocôčok veľkosti 1 × 1 × 1. Aká najväčšia časť povrchu kocky môže byť biela?

Riešenie 28

Kocka 4 × 4 × 4 má štyri typy kocôčok:

1. Kocôčky, ktoré sú úplne vovnútri, takže z nich je vidieť 0 stien. Takýchto je $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
2. Kocôčky, ktoré sú v strede steny veľkej kocky, takže z nich je vidieť 1 stena. Takýchto je $6 \cdot 4 = 24$.
3. Kocôčky, ktoré sú na hranách, ale nie na rohoch, takže z nich je vidieť 2 steny. Takýchto je $12 \cdot 2 = 24$.
4. Rohové kocôčky, z ktorých je vidieť 3 steny. Takýchto je 8.

Kontrola: $8 + 24 + 24 + 8 = 64$.

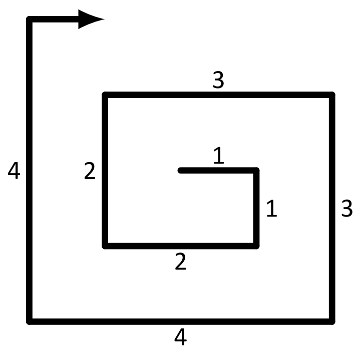
Aby bola čo najväčšia časť povrchu biela, chceme mať najskôr všetky kocôčky typu 4 biele, potom typu 3, potom typu 2 a na typ 1 chceme použiť len čierne kocôčky. K dispozícii však máme len 32 bielych kocôčok. 8 ich teda použijeme na rohové kocôčky a zvyšných 24 na hranové. Zvyšné kocôčky budú musieť byť čierne.

Teraz už ľahko spočítame, aká časť povrchu je biela. Z 8 rohových kocôčok prispieva každá 3 stenami, takže $8 \cdot 3 = 24$ stien je bielych vďaka rohovým kocôčkam. Hranové kocôčky prispievajú každá dvoma stenami, takže $24 \cdot 2 = 48$ stien je bielych. Zvyšné kocky sú čierne.

Takže biele steny tvoria $(24 + 48)/(4 \cdot 4 \cdot 6) = 72/96 = 3/4$ povrchu.

Úloha 29

Danka nakreslila na chodník „obdĺžnikovú špirálu“: najskôr nakreslila dve úsečky dĺžky 1 cm, potom dve úsečky dĺžky 2 cm, ďalšie dve dĺžky 3 cm a tak ďalej, ako na obrázku. Uhly medzi úsečkami boli vždy pravé. Krieda Danke vystačila na nakreslenie úsečiek celkovej dĺžky 1122 cm. Aká je dĺžka najdlhšej úsečky v cm, ktorú Danka nakreslila?



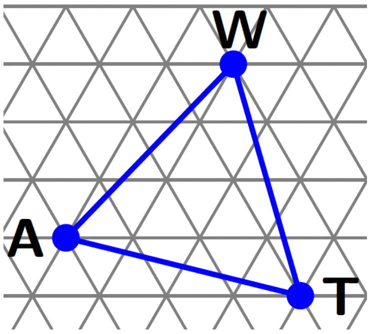
Riešenie 29

Majme špirálu, ktorá má úseky dĺžky 1 až n (každý úsek dvakrát). Jej celková dĺžka bude $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot n$. Tento súčet však môžeme pekne poprehadzovať tak, že vždy vezmeme jedno číslo zo začiatku a jedno z konca. Súčet bude potom vyzerať takto: $(1 + n) + (1 + n) + (2 + [n - 1]) + (2 + [n - 1]) + (3 + [n - 2]) + (3 + [n - 2]) + \ldots$ V každej dvojici (teda v každej okrúhlej zátvorke) je súčet $n + 1$. Zároveň vieme, že počet dvojíc je n, pretože máme spolu 2n čísel. To znamená, že pre špirálu, ktorá má úseky dĺžky 1 až n, bude jej celková dĺžka rovná $n \cdot (n + 1)$.

Celková dĺžka špirály zo zadania je 1122 a z predošlého odseku vieme, že to má byť súčin dvoch po sebe idúcich čísel. Po chvíľke skúšania buď ručne, pomocou kalkulačky, alebo využitím rozkladu 1122 na súčin prvočísel zistíme, že riešením je 33.

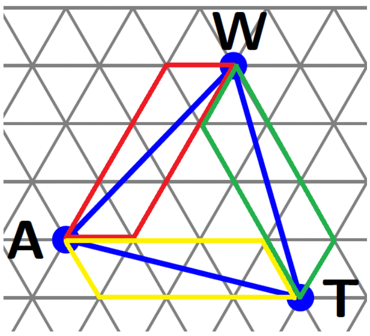
Úloha 30

Sieť na obrázku sa skladá z rovnostranných trojuholníkov s obsahom 1 cm^2. Vrcholy trojuholníka WAT ležia v mrežových bodoch tejto siete, viď obrázok. Aká je plocha trojuholníka *WAT* v cm^2?



Riešenie 30

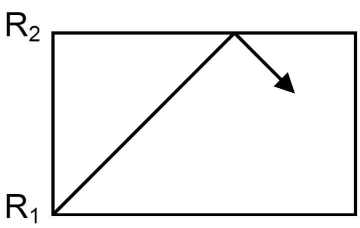
Trojuholník rozdelíme na štyri časti ako na obrázku.



Vnútorný trojuholníček má plochu 4 cm^2. Každý z troch kosodĺžnikov (červený, zelený a žltý) majú plochu 6 cm^2. Trojuholník z týchto plôch zaberá vždy len polovicu, teda 3 cm^2. Celková plocha trojuholníka je teda $4 + 3 \cdot 3$ cm^2 = 13 cm^2.

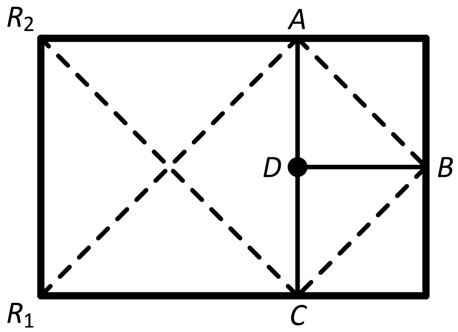
Úloha 31

Dlhšia strana športovej haly meria 30 m. Počas roka v nej prebieha mnoho športových turnajov, napríklad turnaj v odrážaní pukov. Hráč poslal puk z rohu R_1 pod uhlom 45° tak, ako je to vyznačené na obrázku. Po troch odrazoch sa strela dostala do rohu R_2 (strela sa odrazí vždy pod rovnakým uhlom ako dopadla). Koľko metrov meria kratšia strana haly?



Riešenie 31

Uhol dopadu a uhol odrazu sú vždy rovnaké. Keďže sa puk odráža v obdĺžnikovej hale, pokiaľ bol prvýkrát odrazený pod uhlom 45°, tak sa už pod týmto uhlom bude odrážať vždy. Do žiadnej steny nemôže naraziť pod iným uhlom. Tým pádom vieme, že aj do R_2 sa dostane z miesta, z ktorého bol odrazený pod uhlom 45°. Také miesto je len v bode C, ktoré je kolmo pod bodom A. Z toho vyplýva, že bod B musí byť vertikálne presne medzi bodmi A a C, aby 45-stupňový odraz odrazil puk do rovnakej horizontálnej vzdialenosti, ako z ktorej priletel.



Trojuholníky R_1CA a BDA sú podobné (oba sú rovnoramenné a majú uhly 45° pri ramenách). Keďže $|R_1A| = 2|AB|$, z podobnosti platí aj $|R_1C| = 2|DB|$. Z toho je jasné, že $|DB| = 10$ m (pretože $|R_1C| + |DB| = 30$). A keďže $|DB| = |AD|$, tak $|AD| = 10$ m. Z toho vyplýva, že kratšia strana štadióna má $2 \cdot |AD| = 2 \cdot 10 = 20$ m.

Úloha 32

Nech x, y sú prirodzené čísla. Ich najmenší spoločný násobok je 108 a najväčší spoločný deliteľ je 2. Koľko takýchto dvojíc x, y existuje? Každú možnosť počítajte len raz, teda napríklad $x = 12$, $y = 13$ a $x = 13$, $y = 12$ počítajte ako jednu možnosť, nie ako dve.

Riešenie 32

Označme si čísla x a y. Z podmienky, že najväčší spoločný deliteľ oboch čísel je 2 vieme, že x aj y sú deliteľné dvoma. Rozložme 108 na súčin prvočísel. $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Vieme teda, že x alebo y určite musí byť deliteľné $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Nemôže však nastať prípad, kedy by aj x aj y bolo deliteľné troma, pretože potom by ich najväčší spoločný deliteľ nebol 2. Zároveň vieme, že ani x ani y nemôžu byť deliteľné žiadnymi ďalšími prvočíslami okrem 2 a 3, pretože potom by nimi musel byť deliteľný aj ich najmenší spoločný násobok.

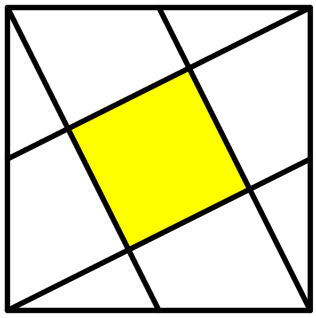
Najmenšia možná hodnota pre x je 2. V tomto prípade musí byť $y = 108$. Máme prvú dvojicu.

Druhá najmenšia možná hodnota pre x je 4. V tomto prípade musí byť $y = 54$. Máme druhú dvojicu.

Viac dvojíc neexistuje. To preto, že 108 je deliteľné len štyrmi, takže už nemôžeme x zväčšovať násobením dvoma. Jediný spôsob, ako by sme x mohli zvýšiť by bolo vynásobiť ho $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, ale tým pádom by y nemohlo byť deliteľné 27 a teda by sme sa dostali akurát k riešeniam $x = 54$, $y = 4$ a $x = 108$ a $y = 2$, ktoré sme už započítali.

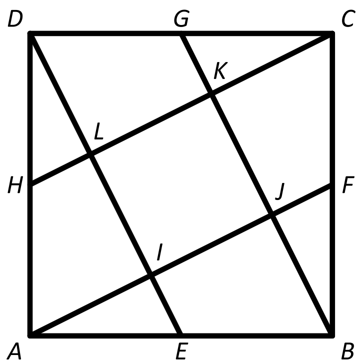
Úloha 33

Úsečky spájajú vo veľkom štvorci vždy vrchol a stred protiľahlej strany. Akú veľkú časť štvorca zaberá malý žltý štvorec v strede?



Riešenie 33

Pomenujme vonkajší štvorec *ABCD*, vnútorný *IJKL* a body v poloviciach strán *EFGH*.



Prvé podstatné pozorovanie je, že dĺžka strany štvorca *IJKL* je rovnaká, ako dĺžky *AI*, *BJ*, *CK* a *DL*. To preto, že $|AE| = |EB|$ (zo zadania) a trojuholníky *AEI* a *ABJ* sú podobné, pretože majú zhodný uhol *IAE* a uhly *AIE* a *AJB* sú pravé. Podobný dôkaz platí pre *BJ*, *CK* a *DL*.

Druhá vec, ktorú si treba všimnúť je to, že $|JB| = 2|IE|$. To vyplýva opäť z toho, že trojuholníky *AIE* a *AJB* sú podobné a $|AB| = 2|AE|$. Opäť podobný dôkaz platí pre $|CK| = 2|FJ|$, $|DL| = 2|GK|$ a $|AI| = 2|HL|$.

Z predošlých dvoch zistení vyplýva, že malý trojuholníček *AEI* môžeme stranou *AE* priložiť k strane *EB* a vznikne štvorec, ktorý má rovnakú plochu ako štvorec *IJKL*. Rovnako to môžeme spraviť pre zvyšné tri štvoruholníky *CFJK*, *DGKL* a *AHLI*. Tým pádom sme štvorec *ABCD* rozdelili na päť zhodných štvorcov (4 novo vzniknuté plus štvorec *IJKL*), takže plocha štvorca *IJKL* je 1/5 plochy štvorca *ABCD*.

Úloha 34

V indiánskej osade žijú dva kmene – Taberi (ktorí hovoria iba pravdu) a Lukeri (ktorí vždy klamú). Každý zo 400 členov osady je buď lovec, strážca alebo šaman (každý má práve jedno povolanie). Každý z osady zodpovedal na nasledujúce tri otázky:

1. Si lovec?
2. Si strážca?
3. Si šaman?

Na prvú otázku odpovedalo 100 obyvateľov osady „nie“, na druhú 200 „nie“ a na tretiu 150 „áno“. Koľko Taberov žije v osade?

Riešenie 34

Prepíšme si odpovede do jednotného tvaru: na prvú otázku odpovedalo 300 ľudí áno, na druhú 200 a na tretiu 150. Spolu teda 650 ľudí odpovedalo áno na jedno z povolaní. Vieme však, že v osade je len 400 členov, takže keby všetci hovorili pravdu, dostali by sme len 400 odpovedí áno. Vieme aj to, že ak je niekto Luker a klame, tak odpovie na dve otázky áno a na jednu nie. Tým pádom 650 odpovedí áno je zložených z počtu Taberov a dvojnásobku počtu Lukerov. Máme teda dve rovnice:

$T + L = 400$ (Taberov a Lukerov je dohromady 400.)

$T + 2L = 650$ (Počet odpovedí áno je 650, každý Taber povie áno raz a každý Luker dvakrát.)

Z prvej rovnice si vyjadríme $T = 400 – L$, čo dosadíme do druhej rovnice. Teda $400 – L + 2L = 650$, takže $L = 250$. Z toho už priamo vyplýva, že $T = 150$.

Úloha 35

Hana, Anna a Jana písali na chémii test, ktorý obsahoval 7 tvrdení. Ku každému mali napísať, či je tvrdenie pravdivé alebo nie. Hana a Anna správne odpovedali na 6 otázok a ich odpovede boli (v tomto poradí):
Hana: „nepravda, nepravda, pravda, pravda, pravda, pravda, nepravda".
Anna: „pravda, nepravda, nepravda, pravda, pravda, pravda, nepravda".
Janine odpovede boli (v tomto poradí): „pravda, pravda, nepravda, nepravda, pravda, pravda, pravda".
Na koľko otázok odpovedala Jana správne?

Riešenie 35

Prepíšme si tvrdenia dievčat do čitateľnejšieho tvaru. Písmenom P označme „pravda", písmenom N „nepravda". Nasledujúca tabuľka zhŕňa odpovede:

Hana:	N	N	P	P	P	P	N
Anna:	P	N	N	P	P	P	N
Jana:	P	P	N	N	P	P	P

Hana a Anna obe odpovedali správne na 6 otázok. Ich odpovede sa líšili v otázkach 1 a 3. Vieme teda s istotou, že na otázku 1 odpovedala nesprávne bud Anna alebo Hana. To isté platí pre otázku 3. Vieme, že sa nemohlo stať, že Hana by odpovedala nesprávne aj na otázku 1 aj 3 (pretože by mala správne spolu menej odpovedí ako 6). Takisto nesprávne na obe otázky nemohla odpovedať ani Anna. Takže máme dve možnosti: správne odpovede na otázky 1 a 3 boli buď N a N (ak sa Anna mýlila v prvej otázke a Hana v tretej) alebo P a P (ak sa Hana mýlila v prvej otázke a Anna v tretej). Ďalej vieme ešte aj to, že vo všetkých ostatných otázkach Hana a Anna nemali chyby (pretože potom by mali menej než 6 otázok správne).

Z toho vyplýva, že Jana mala určite nesprávne odpovede na 2., 4. a 7. otázku a určite správne 5. a 6. otázku. Odpovede na 1. a 3. otázku mala také isté ako Anna a vieme, že Anna odpovedala z týchto otázok správne presne na jednu. Takže Jana mala správne buď 1., 5. a 6. otázku, alebo 3., 5. a 6. otázku. Jana mala správne teda 3 otázky.

Úloha 36

Na konci futbalového ročníka mal na konte každý z 11 hráčov prvočíselný počet gólov. Žiadni dvaja hráči nedali rovnaký počet gólov, nik nestrelil viac než 44 gólov a všetci dali aspoň 3 góly. Tímový priemer počtu strelených gólov je tiež prvočíslo a toto prvočíslo je iné ako počet gólov ľubovoľného hráča. Aký bol tímový priemer?

Riešenie 36

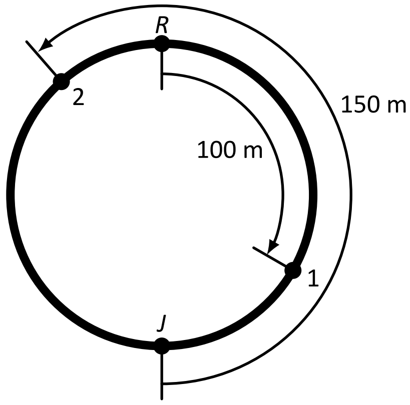
Prvočísla, ktoré spĺňajú zadanie sú tieto: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 a 43. Je ich 13, takže jedno budeme musieť vylúčiť, druhé bude tímový priemer a zvyšných 11 budú počty gólov jednotlivých hráčov. Nemusíme však našťastie skúšať vylúčiť všetky možné dvojice. Použijeme nasledujúce pozorovanie: pokiaľ máme niekoľko čísel, ktorých priemer je *p* a spočítame ich priemer spolu s číslom *p* pridaným medzi ne, dostaneme zase priemer *p*. Tým pádom nám stačí vyskúšať postupne vylúčiť vždy jedno číslo, spočítať priemer zvyšných 12 čísel a pozrieť sa, či výsledok je prvočíslo zarátané v tomto priemere. Po vyskúšaní možností zistíme, že jediné číslo, ktoré toto spĺňa, je číslo 3, pretože (5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43)/12 = 23. Tímový priemer je teda 23.

Úloha 37

Roman a Juro bežia na kruhovej atletickej dráhe opačným smerom. Začínajú v presne protiľahlých bodoch dráhy. Prvýkrát sa stretnú po tom, čo Roman zabehne 100 metrov. Druhýkrát sa stretnú po tom, čo Juro od štartu zabehne 150 metrov. Juro aj Roman každý bežia rovnomernou rýchlosťou (nie nutne obaja takou istou). Koľko metrov meria atletická dráha?

Riešenie 37

Roman a Juro sa prvýkrát stretnú v bode 1. Roman to mal do bodu 1 ďaleko 100 metrov. Druhýkrát sa stretnú v bode 2. Tam to Juro mal 150 metrov ďaleko.



Zatiaľčo pri prvom stretnutí ubehli Juro a Roman dohromady polovicu kruhu, pri druhom stretnutí už spolu ubehli celý jeden kruh. Z toho však vyplýva, že potom, čo vyrazili z bodu 1, museli Roman i Juro obaja ubehnúť dvakrát toľko, čo ubehli, než sa dostali do bodu 1.

U Jura vieme, že spolu ubehol 150 metrov. Do bodu 1 ubehol polovicu toho, čo z bodu 1 do bodu 2. Preto musela byť medzi bodom *J*, z ktorého Juro vyrážal, a bodom 1 vzdialenosť 50 metrov. Vzdialenosť medzi bodmi 1 a 2 teda musela byť 100 m. Vzdialenosť medzi bodmi *J* a *R* je zo zadania polovica kruhu. Vzdialenosť medzi *R* a bodom 1 je 100 metrov, vzdialenosť medzi bodom *J* a 1 (ako sme vypočítali) je 50 metrov. Polovica kruhu má teda 150 metrov, takže celý kruh má 300 metrov.

Úloha 38

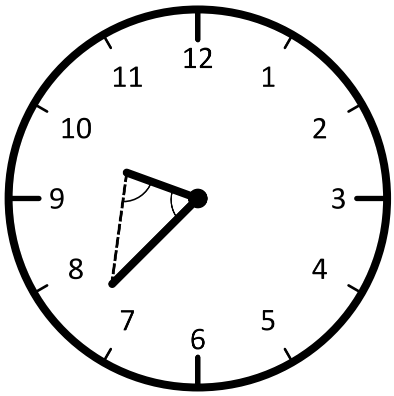
Na rovine je nakreslených 10 priamok. Presne dve priamky sú rovnobežné. V každom priesečníku sa stretávajú vždy presne dve priamky (teda nie tri alebo viac). Koľko priesečníkov je na rovine?

Riešenie 38

Predstavme si, že dané priamky postupne dokresľujeme na rovinu. Pri dokreslení prvej priamky bude na rovine 0 priesečníkov. Dokreslíme druhú priamku, ktorá je rovnobežná s prvou. Stále máme 0 priesečníkov. Dokreslíme tretiu, tentokrát už rôznobežnú priamku. Získame tým dva priesečníky – jeden s prvou a jeden s druhou priamkou, ktoré už boli na rovine. Dokreslime štvrtú, opäť rôznobežnú priamku. Pribudnú 3 priesečníky – jeden s každou priamkou, ktorá už bola na rovine. Pri dokreslení každej ďalšej priamky teda pribudne na rovine o jeden priesečník viac, než pri dokreslení predchádzajúcej priamky. Takže spolu bude na rovine 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44 priesečníkov.

Úloha 39

Niekedy medzi 9:30 a 10:00 tvorí trojuholník určený minútovou a hodinovou ručičkou znázornený na obrázku rovnoramenný trojuholník. Okrem toho je veľkosť dvoch rovnakých uhlov v tomto trojuholníku dvojnásobkom veľkosti posledného uhla. Aký čas ukazujú hodiny? Čas zadajte v tvare HH:MM, napr. 09:28



Riešenie 39

Zamerajme sa najskôr na veľkosť uhlov. V rovnoramennom trojuholníku sú dva uhly zhodné a všetky tri uhly dávajú súčet 180°. Označme si uhly v našom trojuholníku písmenami x, y, y (y sme použili dvakrát, pretože sa jedná o rovnoramenný trojuholník). Platí $x + 2y = 180°$. Zároveň ale zo zadanie vieme, že $y = 2x$. Tým pádom, keď dosadíme do prvej rovnice, dostaneme $x + 4x = 180°$, teda $x = 36°$ a $y = 72°$.

Uhol y však zároveň udáva uhol medzi hodinovou a minútovou ručičkou. Vzhľadom k tomu, že 360° zodpovedá 60 minútam, 72° zodpovedá $72 \cdot (60/360) = 12$ minútam. Vieme teda, že medzi hodinovou a minútovou ručičkou je 12 minútových dielikov.

Zostáva teda určiť, kde sa nachádza hodinová ručička. Hodinová ručička sa posunie o jeden minútový dielik každých $60/5 = 12$ minút. Takže 9:00 je presne na 45 minútach, 9:12 je na 46 minútach, 9:24 je na 47 minútach, 9:36 je na 48 minútach, 9:48 je na 49 minútach. Teraz už vidíme, že riešením je čas 9:36, pretože vtedy je medzi hodinovou a minútovou ručičkou rozdiel presne 12 minút, ktoré zodpovedajú vypočítaným 72°.

Úloha 40

Dve čísla sme zaokrúhlili na desiatky. Aké čísla sme mali pred zaokrúhlením, ak vieme, že súčasne platí:

1. podiel zaokrúhlených čísel je rovnaký ako podiel pôvodných čísel,
2. súčin zaokrúhlených čísel je o 295 väčší než súčin pôvodných čísel,
3. súčet zaokrúhlených čísel je o 6 väčší než súčet pôvodných čísel.

Čísla zadajte zoradené vzostupne.

Riešenie 40

Číslo môžeme zaokrúhlením buď zväčšiť maximálne o 5 (napríklad zaokrúhlením 15 na 20) alebo zmenšiť maximálne o 4 (napríklad zaokrúhlením 14 na 10). Tým pádom je z tretej podmienky jasné, že sme obe čísla zaokrúhlili nahor, pretože súčet zaokrúhlených čísel stúpol o 6. Vieme teda, že toto sú jediné možnosti, čím mohli končiť pôvodné čísla: 5 a 9, 6 a 8, 7 a 7, 8 a 6, 9 a 5.

Druhú podmienku však spĺňajú len možnosti 5 a 9, 9 a 5. To preto, že súčin zaokrúhlených čísel bude končiť nulou. Súčin čísel s 5 a 9 na koncoch bude končiť päťkou, teda po odčítaní bude rozdiel tiež končiť päťkou (tak ako číslo 295). Pre 6 a 8 však súčin končí 8 a pre 7 a 7 končí súčin 9, takže po odčítaní od súčinu zaokrúhlených čísel nemôžeme dostať päťku (a teda rozdiel súčinov nemôže byť 295).

Keď už vieme, čím čísla končia, vieme si vyjadriť prvú podmienku pomocou jednoduchej rovnice. Označme si pôvodné čísla A a B. Potom platí: $A/B = (A + 5)/(B + 1)$. Úpravou dostaneme, že $A = 5B$. Vieme teda, že väčšie z čísel (v našom prípade A) je päťnásobkom čísla B. Zistili sme tiež, že menšie z čísel končí deviatkou a väčšie päťkou. Zostáva len použiť druhú podmienku a dosadiť. Druhá podmienka sa dá zapísať ako: $(A + 5)(B + 1) = AB + 295$. Úpravami dostaneme $5B + 1 = 290$. Vieme, že $A = 5B$. Teda $2A = 290$ a preto $A = 145$ a $B = 29$.

Úloha 41

Na drôte sedia vrabce a holuby. Keď päť vrabcov odletí, na drôte ostanú na každého vrabca dva holuby. Ak potom odletí ešte 25 holubov, ostanú na každého holuba tri vrabce. Aký bol pôvodný počet vrabcov?

Riešenie 41

Z druhej vety je zrejmé, že na drôte muselo byť aspoň 26 holubov. To preto že potom, čo ich odletelo 25, zostali na drôte na každého holuba tri vrabce. Počet holubov teda nemohol byť nula (alebo menej). Vyskúšajme si, čo by sa stalo, keby holubov bolo na začiatku 26. Potom by tam na konci zostal 1 holub a tým pádom 3 vrabce. Predtým však 5 vrabcov odletelo, takže keby bolo na začiatku na drôte 26 holubov, muselo by tam byť 8 vrabcov. Teraz však neplatí prvá podmienka: po odlete piatich vrabcov je na každého vrabca 26/3 holubov. Čo by sa stalo, keby bolo na drôte 27 holubov? Potom by tam na konci muselo byť 6 vrabcov, teda na začiatku by ich muselo byť 11. Tým pádom je prvá podmienka opäť nesplnená – na každého vrabca by bolo 27/6 holubov.

Vidíme však, že pridaním jedného holuba pridáme vždy tri vrabce. Potrebujeme teda, aby pomer (holuby)/(vrabce – 5) bol 2, podľa podmienky zo zadania. Ďalšia dvojica teda bude 28/9, stále málo. Ďalšia 29/12, stále nič. 30/15 vyhovuje, máme riešenie. Holubov bolo teda pôvodne 30 a vrabcov muselo byť 15 + 5 = 20.

Úloha 42

Nájdite päť po sebe idúcich prirodzených čísel, pre ktoré platí: súčet druhých mocnín prvých troch čísel sa rovná súčtu druhých mocnín posledných dvoch čísel. Akú hodnotu má najmenšie z týchto piatich čísel? Poznámka: Druhá mocnina čísla je toto číslo vynásobené samo so sebou; napríklad druhá mocnina čísla 5 je 25.

Riešenie 42

Označme si prostredné číslo pätice x. Potom zo zadania vieme, že platí: $(x-2)\cdot(x-2)+(x-1)\cdot(x-1)+x\cdot x = (x+1)\cdot(x+1)+(x+2)\cdot(x+2)$.

Roznásobením obidvoch strán dostaneme: $x\cdot x-4x+2+x\cdot x-2x+1+x\cdot x = x\cdot x+2x+1+x\cdot x+4x+2$, čo zjednodušíme na: $3\cdot x\cdot x-6x+3 = 2\cdot x\cdot x+6x+3$, čo ďalej zjednodušíme na: $x\cdot x = 12x$. Jedným riešením tejto rovnice je $x = 0$, to však nevyhovuje zadaniu, pretože prvé dve čísla pätice by museli byť záporné. Neboli by teda prirodzené, ako vyžaduje zadanie. Druhé riešenie rovnice je $x = 12$, z čoho vyplýva, že najmenšie číslo pätice je $x - 2 = 10$.

Úloha 43

Pravidelný mnohouholník má 44 uhlopriečok. Koľko má tento mnohouholník strán?

Riešenie 43

Riešenie 1: Pozrime sa na niekoľko malých prípadov, kde si uhlopriečky vieme nakresliť. Štvorec (ktorý má 4 strany) má 2 uhlopriečky. Päťuholník má 5 uhlopriečok. Šesťuholník má 9 uhlopriečok. Koľko uhlopriečok by sme museli pridať, keby sme zobrali už existujúci šesťuholník, rozpojili ho (ale nechali jeho už nakreslené uhlopriečky) a pridali doňho siedmy vrchol – teda urobili z neho sedemuholník?

Museli by sme ich pridať 5, pretože s dvoma vrcholmi nový vrchol susedí a do seba samotného uhlopriečka nevedie. Tým pádom by sedemuholník mal 9 + 5 = 14 uhlopriečok.

Teraz už vieme, ako pokračovať ďalej. Osemuholník by mal 14 + 6 = 20 uhlopriečok, deväťuholník 20 + 7 = 27, desaťuholník 27 + 8 = 35 a jedenásťuholník 35 + 9 = 44. Výsledok je teda jedenásťuholník.

Riešenie 2: Vyjadrime si závislosť počtu uhlopriečok od počtu strán: $n \cdot (n-3)/2$, kde n je počet strán. To preto, že z každého vrcholu vedie uhlopriečka do n–3 vrcholov (nevedie do susedov a seba samotného) a dvojkou delíme, pretože týmto spôsobom sme každú uhlopriečku zarátali dvakrát. Potom už len riešime rovnicu $n \cdot (n - 3)/2 = 44$, ktorá sa dá riešiť aj bez znalosti kvadratických rovníc – hľadáme číslo a toto číslo o tri menšie, ktoré spolu vynásobené dávajú 88. Toto vieme efektívne nájsť aj skúšaním.

Úloha 44

Koľko trojciferných čísel je takých, že ich cifry zľava doprava stúpajú? Napr. číslo 137 túto vlastnosť spĺňa, ale čísla 215 a 115 ju nespĺňajú.

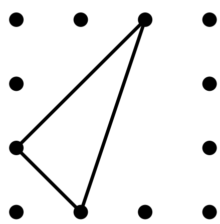
Riešenie 44

Takéto čísla musia začínať číslicami 1, 2, 3, 4, 5, 6 alebo 7. Nemôžu začínať číslami 8 alebo 9, pretože potom by už nešla splniť podmienka zo zadania. Pokiaľ číslo začína číslicou 7, máme jedinú možnosť: 789. Pre sedmičku ako prvú cifru teda existuje jediná možnosť. Pozrime sa na šestku na prvej pozícii. Tu už máme možností viac: 678, 679 a 689, takže spolu tri možnosti. U päťky je možností zase viac, pozrime sa teda na to, ktorá cifra môže byť na druhej pozícii, ak na prvej je 5. Môžu to byť cifry 6, 7 a 8. Pokiaľ je to 6, máme 3 možnosti, pre 7 máme 2 možnosti a pre 8 jedinú možnosť. Spolu to je teda 3 + 2 + 1 = 6 možností, pokiaľ je na prvom mieste cifra 5.

Pre cifru 4 na prvom mieste môžeme postupovať rovnakým spôsobom ako pre cifru 5, teda dostaneme spolu 4 + 3 + 2 + 1 = 10 možností. Pre cifru 3: 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 možností. Pre 2: 6+5+4+3+2+1 = 21. A konečne pre 1: 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28. Spolu teda máme 1+3+6+10+15+21+28 = 84 možností.

Úloha 45

Pozdĺž hrán štvorca veľkosti 3 × 3 je s rovnomernými rozostupmi načrtnutých 12 bodov ako na obrázku. Koľko trojuholníkov sa dá vytvoriť tak, že ich vrcholy budú tvorené tromi z týchto 12 bodov?



Riešenie 45

Pozrime sa najskôr koľko je na obrázku všetkých možných trojíc bodov. Z týchto trojíc niektoré nebudú trojuholníky, pretože všetky tri body budú ležať na jednej strane. Pokiaľ ale spočítame počet všetkých trojíc a odčítame tie, ktoré nie sú trojuholníky, dostaneme počet trojuholníkov.

Celkový počet trojíc bodov spočítame takto: vyberme si prvý bod, na to máme 12 možností. Teraz, keď si vyberáme druhý bod, máme už len 11 možností. A pre tretí bod máme už len 10 možností. To je spolu $12 \cdot 11 \cdot 10$ trojíc. Ale pozor, každú trojicu sme počítali viackrát. Trojicu ABC sme počítali ako ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, teda 6-krát. Preto je celkový počet trojíc len $12 \cdot 11 \cdot 10/6 = 220$.

Teraz na každej strane vzniklo niekoľko trojíc, ktoré netvoria trojuholníky, lebo všetky tri body ležia na priamke. Také trojice sú pre každú stranu 4, teda celkovo sme započítali $4 \cdot 4 = 16$ trojíc, ktoré netvoria trojuholníky. Všetky zvyšné trojice už trojuholníky tvoria. Preto je počet trojuholníkov 220 – 16 = 204.