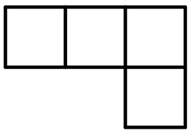
Vzorová řešení MatX 2018

matx.p-mat.sk

14. února 2018

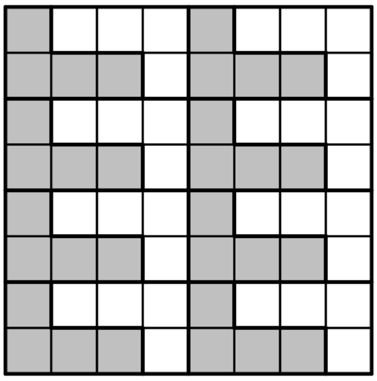
Úloha 1

V každém políčku tabulky 8 × 8 je napsané celé číslo tak, že platí, že součet čísel v každých čtyřech políčkách tvořících tvar písmene „L“ (viz obrázek) je 20. Jaký je součet čísel v celé tabulce? Poznámka: „L“ můžeme libovolně otáčet či převracet.



Řešení 1

Pokud si nakreslíme tabulku, snadno zjistíme, že jde celá pokrýt L-ky bez překryvů jako na obrázku. Víme, že součet čísel v každém L-ku je 20 a na pokrytí celé tabulky jsme jich použili 16. Tím pádem musí být součet všech čísel v tabulce 16 × 20 = 320.



Úloha 2

Ela si zapsala, že nakreslit 5 autíček trvá stejně dlouho jako nakreslit 10 domečků, nakreslit 8 domečků trvá jako 5 čtverců, nakreslit 10 čtverců trvá jako 12 kruhů a nakreslit 6 kruhů trvá jako 16 srdíček. Pokud stihne nakreslit 7 autíček, kolik by za tento čas stihla nakreslit srdíček?

Řešení 2

Přepišme si zadání do rovnic, ať se nám v tom lépe orientuje:

(1) 5A = 10D

(2) 8D = 5Č

(3) 10Č = 12K
(4) 6K = 16♡
Upravme si (4): 12K = 32S. Tedy víme, že 10Č = 32♡.
Upravme si (2): 16D = 10Č. Tedy víme, že 16D = 32♡.
Upravme si (1): 8A = 16D. Tedy víme, že 8A = 32♡, což lze upravit na 1A = 4♡. Tím pádem 7A = 28♡. Ela stihne nakreslit 28 srdíček.

Úloha 3

Jakub spadl do studny, a tak začal lézt nahoru. Každý den vylezl o 1/18 výšky studny, ale v noci, kdy odpočíval, klesl o 1/36 výšky studny. Po kolika dnech se mu podařilo vylézt ze studny?

Řešení 3

Kubo každý den vyleze o 1/18 – 1/36 = 1/36 výšky studny. Avšak ze studny vyleze již za 35 dní, protože v 35. den již vyleze nahoru, a tedy ten den již nespadne o 1/36 dolů.

Úloha 4

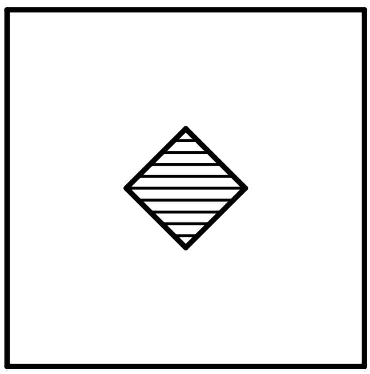
Sportovní soutěže se zúčastní 50 týmů rozdělených do 5 skupin po 10 týmech. V každé skupině hraje každý tým jeden zápas s každým dalším týmem z dané skupiny. Když se odehrají tyto zápasy, vítězný tým z každé skupiny postupuje do druhého kola, kde opět hraje každý tým s každým. Kolik zápasů se celkem odehraje?

Řešení 4

Pokud je ve skupině X týmů, tak odehrají $X \times (X - 1)/2$ zápasů. To proto, že máme X možností jak si vybrat 1. tým a $(X - 1)$ možností jak si vybrat druhý tým. Abychom však nepočítali zápas A vs B a B vs A jako dva zápasy, musíme ještě výsledek vydělit dvěma. V každé z pěti skupin bylo 10 týmů. Ty hrály každý s každým, tedy celkem muselo proběhnout v každé skupině 10 × 9/2 = 45 zápasů, celkem tedy 5 × 45 = 225 zápasů. Poté se muselo ještě odehrát 5 × 4/2 = 10 zápasů, celkem tedy 225 + 10 = 235.

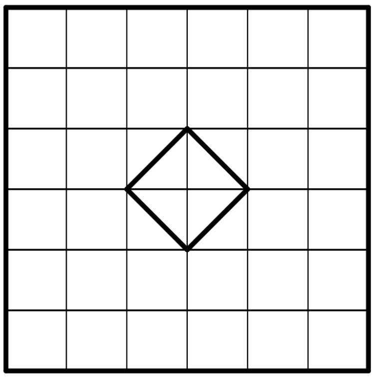
Úloha 5

Honzova sestra si před Vánoci vystřihovala vločky z papíru. Honza si taky nachystal papír ve tvaru čtverce se stranou délky 6 cm. Chtěl však být originální, a tak místo zářezů, trojúhelníčků a oblouků vystřihl jenom jeden čtvereček. Ten vystřihl ze středu velkého čtverce a to tak, že střed vystřihnutého čtverečku byl stejný jako střed velkého čtverce. Čtvereček byl vůči velkému čtverci otočný o 45 stupňů a jeho uhlopříčka měla 2 cm (viz obrázek). Jakou plochu v cm^2 má vločka, kterou Honzík vyrobil?



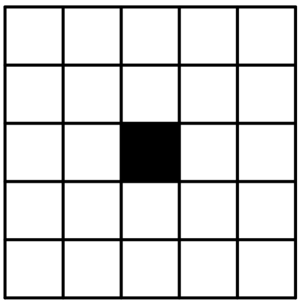
Řešení 5

Velký i malý čtverec si můžeme nakreslit na čtverečkovou síť 6 × 6 jako na obrázku. Díky této čtvercové síti je již zřejmé, že obsah vnitřního čtverečku je $2 \times 2/2 = 2\ cm^2$ a obsah velkého čtverce $6 \times 6 = 36\ cm^2$. Stačí nám vypočítat rozdíl obsahu velkého čtverce a vystřihnutého čtverečku, který je $36 - 2 = 34\ cm^2$.



Úloha 6

Samuel má doma mřížku 5 × 5 jako na obrázku. Políčko ve středu je černé. Kolik je na této mřížce čtverců, které obsahují ve svém vnitřku černý čtvereček?



Řešení 6

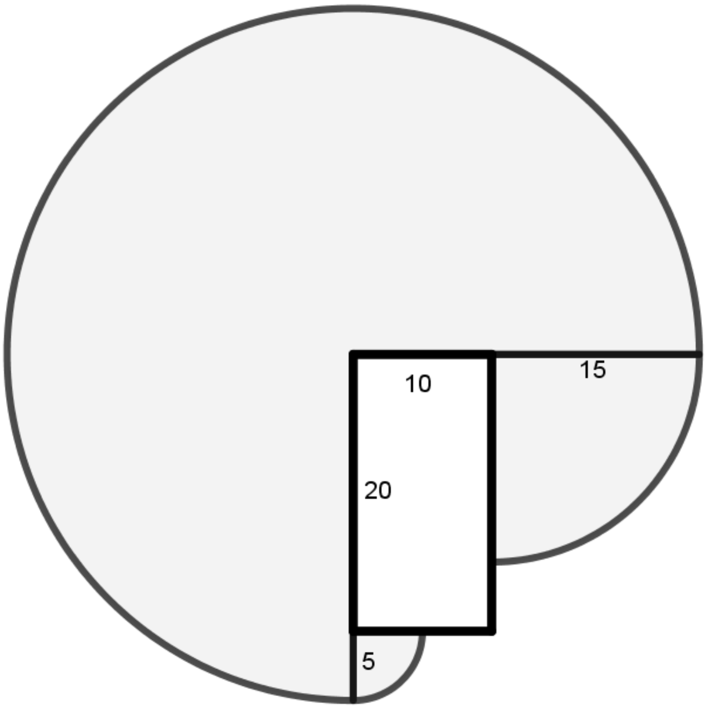
Pojďme na to systematicky. Čtverce můžou mít velikost 1 × 1, 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4 a 5 × 5. Pro každou velikost snadno spočítáme, kolik jich vyhovuje zadání:
1 × 1: 1
2 × 2: 4
3 × 3: 9
4 × 4: 4
5 × 5: 1
Celkem tedy 1 + 4 + 9 + 4 + 1 = 19.

Úloha 7

Kůň je přivázaný zvenku o roh obdélníkové stáje, jejíž strany jsou 10 a 20 metrů. Vypočítejte plochu v m^2, po které může chodit, pokud lano, kterým je přivázaný, měří 25 metrů. Odpověď zaokrouhlete na jedno desetinné místo. Poznámka: v tabulce níže najdete plochy kruhů o různých poloměrech:
5 m: 78,5 m^2
10 m: 314,2 m^2
15 m: 706,9 m^2
20 m: 1256,6 m^2
25 m: 1963,5 m^2

Řešení 7

Z obrázku vidíme, že obsah plochy, po které může kůň chodit je 3/4 kruhu o poloměru 25 m, a po 1/4 z kruhů o poloměrech 15 m a 5 m. Tedy: 3/4 × 1963,5 + 1/4 × (78,5 + 706,9), což je přibližně 1669 m^2.



Úloha 8

Tři bratři přišli do hotelu a byli unavení, tak usnuli. Kuchař jim mezitím donesl hrnec brambor. První bratr se probudil a měl hlad, a tak snědl svoji třetinu brambor z hrnce a zase usnul. Pak se vzbudil druhý bratr a nevěděl, že první bratr už jedl, a tak snědl třetinu brambor, které byly v hrnci. Pak se probudil třetí bratr, a protože ho probudil šramot, tak si myslel, že jeden z bratrů už před ním jedl, a tak snědl polovinu brambor v hrnci. V hrnci zůstalo 6 brambor. Kolik brambor bylo v hrnci na začátku?

Řešení 8

Nechť bylo brambor na začátku X. První snědl $X/3$, tedy brambor po jeho jídle zbylo $X–X/3 = 2X/3$. Druhý snědl třetinu zbytku, takže $1/3 \times 2X/3 = 2X/9$. Brambor tedy po jeho jídle zbylo $2X/3 – 2X/9 = 4X/9$. Třetí snědl polovinu zbytku, takže $1/2 \times 4X/9 = 2X/9$. Po jeho jídle tedy zbylo $4X/9 – 2X/9 = 2X/9$ brambor. A nyní je to již jednoduché. Víme, že zbylo 6 brambor, takže $2X/9 = 6$, tedy brambor bylo původně $X = 27$.

Úloha 9

Máte tři navzájem neshodné obdélníky s obsahem 12 cm^2, které mají délky stran vyjádřené v cm celými čísly: 1 cm × 12 cm, 2 cm × 6 cm, 3 cm × 4 cm. Určete nejmenší obsah v cm^2, pro který bychom získali v obdobné úloze právě čtyři navzájem neshodné obdélníky.

Řešení 9

Zřejmě nejjednodušší řešení je v této úloze postupovat po číslech od 12 výše dokud nenajdeme řešení. Práci si můžeme zjednodušit tím, že přeskočíme všechna prvočísla (která mají jen 2 dělitele, zatímco mi jich potřebujeme alespoň sedm). Po chvilce hledání se dostaneme k číslu 24, které splňuje zadání, protože 24 = 1 × 24 = 2 × 12 = 3 × 8 = 4 × 6.

Úloha 10

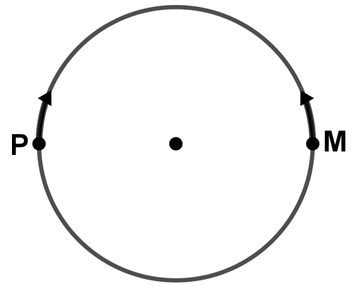
Sousedka Růženka má čtyři kočky různých barev, které jí postupně darovali její známí. Děti chtějí vědět, jak se kočky jmenují a kterou dostala jako třetí, ale sousedka má špatnou paměť. Řekla jim:
„Jako první jsem dostala kočku Dianu.
Černou kočku jsem měla ještě před šedou a Albínu, bílou kočku, jsem dostala jako druhou v pořadí.
Cilku jsem dostala dříve než hnědnou kočku.
Bela nemá šedou barvu."
Kterou kočku dostala sousedka jako třetí a jakou měla barvu?

Řešení 10

Přímo ze zadání víme, že:
1 – Diana – ?
2 – Albína – bílá
3 – ? – ?
4 – ? – ?
Hned víme, že Cilka musela být 3., protože jinak by nemohla být před hnědou. Víme taky, že 4. kočka byla hnědá:
1 – Diana – ?
2 – Albína – bílá
3 – Cilka – ?
4 – ? – hnědá
Černá musela být před šedou, takže 1. musela být černá, 3. šedá. Zároveň nám na poslední kočku zbývá už jen Bela:
1 – Diana – černá
2 – Albína – bílá
3 – Cilka – šedá
4 – Bela – hnědá

Úloha 11

Pat a Mat běhají na kruhové dráze. Oba běží navzájem opačnými směry. Začínají tak, že úsečka, která je spojuje, je průměrem kružnice určené dráhou. Od momentu, kdy vystartovali, až po moment, kdy se potkali na jednom místě, uběhl Pat 100 m. Od tohoto momentu až po moment, kdy se setkali znova, uběhl Mat 150 m. Jaká je délka kruhové dráhy v metrech? Poznámka: Pat i Mat udržují stále stejnou rychlost, kterou každý nasadil na začátku.



Řešení 11

Při prvním setkání uběhli Pat a Mat dohromady půl délky tratě. Při druhém již uběhli dohromady 1 délku tratě, což jim nutně muselo trvat dvakrát tak déle než uběhnout půl délky tratě. Když běželi celou délku tratě, tak Mat uběhl 150 m. Kdyby tedy běžel poloviční čas, tak by uběhl 75 m. A tím pádem je délka půlky délky tratě 100 m (které uběhl Pat) + 75 m (které uběhl Mat) = 175 m. Celková délka tratě je tedy 175 + 175 = 350 m.

Úloha 12

Na večírku nastala tato situace: Každá žena tancovala v průběhu večera právě s dvěma muži a každý muž tancoval právě s třemi ženami. Kolik bylo na večírku žen, pokud mužů bylo 18?

Řešení 12

Dejme tomu, že žen bylo na večírku Z a mužů M = 18. Spočítejme, kolik se na večírků uskutečnilo tanců. Každá žena tancovala s dvěma muži, tedy nutně muselo být 2 × Z tanců. Ale zároveň víme, že každý muž tancoval s třemi ženami, takže muselo být 3 × M tanců. Tedy 2 × Z = 3 × M. M = 18, tedy 2 × Z = 54, tedy žen bylo na večírku Z = 27.

Úloha 13

Tomáš nám prozradil zajímavý fakt o svých narozeninách: „Předevčírem jsem měl 25 let a příští rok už mi bude 28 let." Toto tvrzení může platit jen v jednom dni v roce. Kdy má Tomáš narozeniny?

Řešení 13

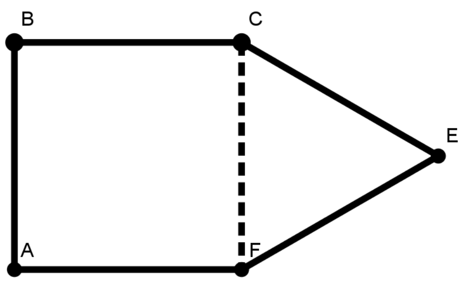
Řešení je **31. 12.** (2017) a Tomáš nám říká tento fakt 1. 1. 2018. Předevčírem (30. 12. 2017) měl 25, 31. 12. 2017 už měl 26. Letos mu 31. 12. 2018 bude 27 a příští rok 31. 12. 2019 mu bude 28.

Úloha 14

Ondřej má obraz ve tvaru pětiúhelníku *ABCDE*, v kterém mají všechny strany stejnou délku. Navíc úhly ABC a *BAE* jsou pravé a všechny ostatní úhly uvnitř pětiúhelníku *ACBDE* jsou menší než 180 stupňů. Jaká je velikost úhlu *AED*?

Řešení 14

Pokud si nakreslíme, co vše víme ze zadání, dostaneme následující obrázek. *ABCE* je zjevně ze zadání čtverec. Protože všechny strany pětiúhelníku mají stejnou délku, tak *CDE* musí být rovnostranný trojúhelník, který má všechny úhly 60 stupňů. Tím pádem je velikost úhlu |*AED*| = 90+60 = 150 stupňů.

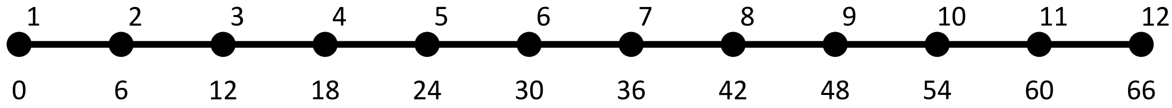


Úloha 15

Hodiny odbily 6 úderů. Od prvního do posledního úderu jim to trvalo 30 sekund. Kolik sekund bude trvat odbíjení od prvního do posledního úderu, pokud úderů bude 12?

Řešení 15

Na řešení této úlohy je nejlepší si nakreslit obrázek. Z něho již snadno vidíme, že 12 úderů bude trvat 66 sekund. Důvod, proč to není intuitivních 60 sekund je ten, že jedno odbití netrvá 6 sekund, ale interval mezi dvěma odbitími trvá 6 sekund.

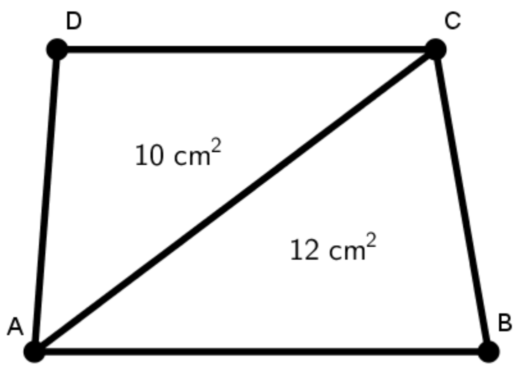


Úloha 16
Házeme dvěma hracími kostkami, jedna je modrá a druhá je červená. Jaká je pravděpodobnost, že součet hozených čísel na obou kostkách bude 9?

Řešení 16
Pokud házeme dvěma kostkami, máme celkem 36 možností, jak nám můžou padnout, protože kostky mají různé barvy a tedy 1 na červené a 6 na modré není to samé jako 6 na červené a 1 na modré. Z těchto 36 možností dávají součet 9 tyto kombinace: 3 + 6, 6 + 3, 4 + 5, 5 + 4. Celkem 4 kombinace. Pravděpodobnost je tedy 4/36 = 1/9.

Úloha 17
Lichoběžník je rozdělený jednou uhlopříčkou na dva trojúhelníky, které mají obsahy 10 cm^2 a 12 cm^2. Jeho delší základna má délku 6 cm. Jakou délku v centimetrech má kratší základna tohoto lichoběžníku?

Řešení 17
Obsah vrchního trojúhelníku je délka kratší základny krát výška děleno dvěma. Obsah spodního trojúhelníku je délka delší základny krát výška děleno dvěma. Z toho plyne, že obsah spodního trojúhelníku musí být větší, a tedy 12 cm^2. Z toho již plyne, že výška lichoběžníku má 4 cm (protože 4 × 6 / 2 = 12 cm^2), a tedy délka vrchní základny musí být 5 cm (protože 4 × 5 / 2 = 10 cm^2).



Úloha 18
Alenka se procházela mezi mrkvovými poli. Alence vrtalo hlavou: „Kolik polí tu jen může být?“ Na místních informacích dostala následující údaje: počet mrkvových polí je nejmenší šesticiferné číslo ABCDEF dělitelné pěti takové, že jen A a D jsou prvočísla a jeho cifry jsou seřazené sestupně (A > B > C > D > E > F). Kolik tam bylo mrkvových polí? Poznámka: 1 není prvočíslo.

Řešení 18
Číslo ABCDEF musí být dělitelné pěti. Tím pádem na posledním místě musí být buď 0, nebo 5. 5 tam však být nemůže, protože potom by na cifru A vycházela desítka. Tím pádem víme, že F = 0. A a D jsou prvočísla. Tedy A musí být jedním z čísel 2, 3, 5, 7. 2, 3 ani 5 být nemůže, protože by potom již nevyšly cifry na B, C, D, E. Tím pádem víme, že A = 7. Nyní se podívejme na D: Víme, že nemůže být 5, protože by nevyšly cifry na B a C. Musí být tedy 2 nebo 3. Hledáme nejmenší, tak zkusme napřed D = 2. Máme tedy

7BC2E0. Na E zbývá jen 1 (což není prvočíslo), na B a C zbývají 6 a 4. Řešení je tedy 764210. Ještě pro jistotu ověřme, že pro D = 3 nedostaneme náhodou lepší řešení. 7BC3E0. E = 1, protože 2 je prvočíslo. B = 6, C = 4. I toto je tedy splňuje podmínky, avšak 764310 je větší než 764210, takže to není řešení.

Úloha 19

Přirozené číslo Č nazýváme krásné pokud Č je prvočíslo, Č – 14 je prvočíslo a zároveň i Č + 14 je prvočíslo. Najděte součet všech krásných čísel.

Řešení 19

Prvočíslo je takové číslo, že je dělitelné jenom jedničkou a sebou samým. Tím pádem pokud ukážeme, že je nějaké číslo dělitelné krom těchto dvou čísel ještě aspoň jedním dalším, tak hned víme, že to není prvočíslo. Dělitelnost dvojkou nemá smysl ukazovat, protože všechna prvočísla krom dvojky jsou lichá. Co tak tedy dělitelnost třemi? Chceme tedy ukázat, že Č – 14 i Č i Č + 14 nejsou ani jedno dělitelné třemi. Dejme tedy tomu, že Č – 14 dává po dělení třemi zbytek 1. Potom ale Č dává po dělení třemi zbytek 0, a tedy není prvočíslo. Č – 14 tedy nemůže dávat zbytek 1 po dělení třemi. Kdyby však dávalo zbytek 2 po dělení třemi, tak by Č + 14 bylo dělitelné třemi. Č – 14 tedy musí být dělitelné třemi a zároveň být prvočíslo. Takové číslo existuje jen jedno, a totiž trojka. Zbývá již jen ověřit, zda Č = 17 je prvočíslo a Č + 14 = 31 je také prvočíslo. Vidíme, že obě jsou, a tedy Č = 17 je jediné řešení úlohy.

Úloha 20

Trojciferné číslo nazýváme strašidelné, pokud je dělitelné šesti a po vyškrtnutí libovolné cifry dostaneme dvojciferné číslo dělitelné šesti. Kolik je trojciferných strašidelných čísel? Poznámka: 00, 01, 02, ..., 09 nepovažujeme za dvojciferná čísla.

Řešení 20

Označme si cifry trojciferného strašidelného čísla a, b, c. Díky pravidlům dělitelnosti víme, že ab, ac, bc a abc musí být dělitelná zároveň dvěma a třemi. Zároveň také víme, že pravidlo pro dělitelnost trojkou říká, že číslo je dělitelné třemi právě tehdy když je jeho ciferný součet dělitelný třemi. Ze zadání tedy víme, že má platit, že šestka dělí: 1) a + b + c, 2) a + b, 3) a + c, 4) b + c. Z toho plyne, že a, b, c musí být všechna dělitelná třemi. To proto, že pokud si vybereme dvě čísla, tak jejich součet musí být dělitelný třemi. Ale i pokud k nim přičteme třetí číslo, tak tento nový součet musí být také dělitelný třemi. A tím pádem musí být toto třetí číslo dělitelné třemi. Toto platí pro všechny tři čísla, takže musí být všechna tři dělitelná třemi.

Nyní se podívejme na cifru c. Ta musí být dělitelná třemi, ale i dvěma, protože celé číslo musí být dělitelné šesti. Cifra c tedy může být buď 0, nebo 6. Cifra b může být jen 6, protože 0 být nemůže. Cifra a může být 3, 6, nebo 9, protože v žádném z čísel ab, ac, bc, nebo abc se nevyskytuje na posledním místě. Řešením jsou tedy tyto možnosti: 360, 366, 660, 666, 960, 966.

Úloha 21

Máme aritmetický stroj, který dělá následující:

1. Na vstupu dostane číslo x.
2. Číslo x vynásobí dvěma.
3. K výsledku z předešlého bodu přičte dvojku.
4. Výsledek z předešlého bodu vynásobí sám se sebou a vypíše ho na výstupu.

Josef umístil do stroje svoje oblíbené číslo a ze stroje mu vypadlo stejné číslo jako Matějovi, který tam také umístil svoje oblíbené číslo. Znamená to, že se jejich oblíbená čísla musí rovnat?

Řešení 21

Přepišme si matematicky, co dělá aritmetický stroj. V prvním kroku udělá z x číslo 2x. Poté 2x + 2.

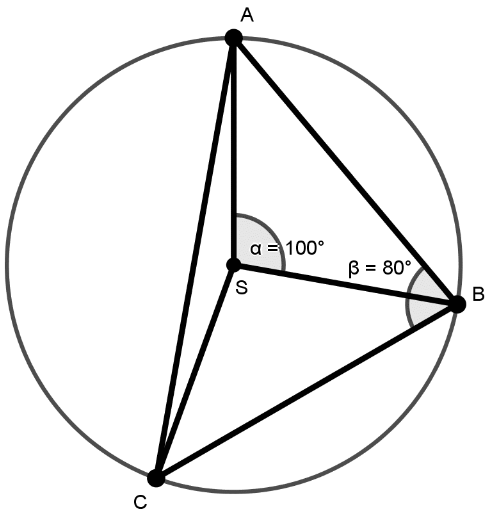
Následně (2x + 2) × (2x + 2). Nyní je třeba si vzpomenout, že například 2 × 2 = 4, ale i –2 × –2 = 4. A tedy například pro x = 1 dostaneme (2 × 1 + 2) × (2 × 1 + 2) = 16 a pro x = –3 dostaneme (2 × –3 + 2) × (2 × –3 + 2) = 16. Odpověď je tedy ne, do aritmetického stroje lze dát dvě nestejná čísla, pro která však stroj vrátí stejný výsledek.

Úloha 22

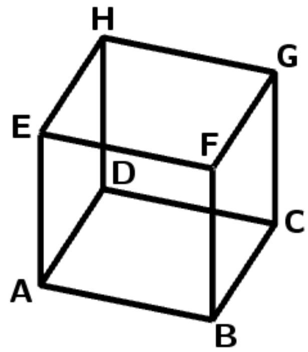
Stela má tři kamarády: Alexe, Bedřicha a Cypriána. Neuvěřitelnou náhodou je přímá cesta od Stely ke každému z nich domů stejně dlouhá. Stela zjistila, že cesta k Alexovi a cesta k Bedřichovi svírají úhel přesně 100°. Bedřich zase zjistil, že jeho cesty k zbylým dvěma chlapcům svírají úhel 80°. Cypriánovi bylo líto, že o jeho cestách nikdo nepřemýšlel. Zjistěte, jaký je úhel mezi jeho cestami k Alexovi a Bedřichovi.

Řešení 22

Víme, že |ASB| = 100°. Potom také víme, že |SA| = |SB| = |SC|, a že |ABC| = 80°. Protože trojúhelník ASB je rovnoramenný, musí být úhly SAB a SBA stejné a mít velikost (180° – 100°)/2 = 40°. Z toho plyne, že i úhel SBC bude mít velikost 40° a tedy úhel |BSC| = 100°. Protože |SB| = |SC|, bude trojúhelník SBC rovnoramenný, tedy úhel |SCB| = |SBC| = 40°. Musí platit, že |ASC| + |ASB| + |BSC| = 360°, a |ASB| + |BSC| = 200°, tedy |ASC| = 160°. Protože i trojúhelník SAC je rovnoramenný, tak úhel |SCA| = (180° – 160°)/2 = 10°. Nyní stačí sečíst |SCA| + |SCB| = |ACB| = 10° + 40° = 50°, což je i velikost úhlu mezi cestičkami od Cypriána k Alexovi a Bedřichovi.



Úloha 23
Vrcholy krychle ABCDEFGH na obrázku jsou označeny čísly 1 až 8 přičemž vrchol A má hodnotu 1. Navrhněte takové umístění těchto čísel ve vrcholech krychle, aby byl součet cifer ve vrcholech na každé stěně stejný. Řešení zapište jako osmici čísel v pořadí ABCDEFGH (A = 1, takže první číslo bude vždy 1).

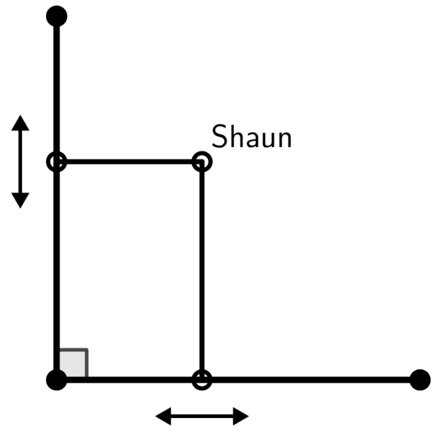


Řešení 23
Napřed si vypočítejme, kolik bude součet čísel na jedné stěně. Protože číslo z každého vrcholu započítáváme na třech stranách, musíme čísla 1 až 8 vynásobit třemi a poté vydělit šesti, čímž dostaneme součet na každou ze šesti stěn krychle: (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) × 3 / 6 = 18. Nyní stačí zkoušet dokud nenajdeme osmici, která splňuje zadání. Řešení je poměrně dost, zde jsou všechna (pro případ, kdy hodnota vrcholu A = 1):

A B C D E F G H
1 4 5 8 6 7 2 3
1 4 5 8 7 6 3 2
1 4 6 7 8 5 3 2
1 4 7 6 8 5 2 3
1 6 3 8 4 7 2 5
1 6 3 8 7 4 5 2
1 6 4 7 8 3 5 2
1 6 7 4 8 3 2 5
1 7 2 8 4 6 3 5
1 7 2 8 6 4 5 3
1 7 4 6 8 2 5 3
1 7 6 4 8 2 3 5
1 8 2 7 4 5 3 6
1 8 2 7 6 3 5 4
1 8 3 6 4 5 2 7
1 8 3 6 7 2 5 4
1 8 5 4 6 3 2 7
1 8 5 4 7 2 3 6

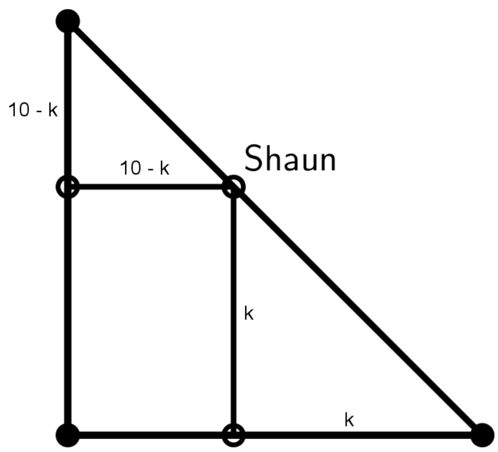
Úloha 24

Na louce se pase ovečka Shaun přivázaná na provazu následujícím způsobem: ve vrcholech rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami dlouhými 10 m jsou zapíchnuté tři kolíku, které jsou spojené dvěma provazy délky 10 m. Další provaz stejné délky je napojený kroužky každým koncem na jeden z předešlých provazů. Ovečka je přichycená kroužkem k předešlému provazu jako na obrázku. Provazy se můžou přes kroužky volně pohybovat. Na jak velké ploše v m^2 se může ovečka Shaun pást? Poznámka: Ovečka nemůže překročit dva provazy napnuté mezi kolíky.



Řešení 24

Ovečka se umí dostat maximálně na přeponu trojúhelníku, protože pokud se od jedné odvěsny vzdálí *k* metrů, tak od druhé se může vzdálit maximálně 10 – *k* metrů, čímž vždy vzniknou dva rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky se stranami *k* a 10 – *k* tak jako na obrázku. Plocha tohoto trojúhelníku je 10 × 10 / 2 = 50 m^2.



Úloha 25

V letadle je třikrát tak více dětí než dospělých. Průměrný věk dospělých je 44 let. Jaký je průměrný věk dětí, pokud je průměrný věk všech lidí v letadle 20 let?

Řešení 25

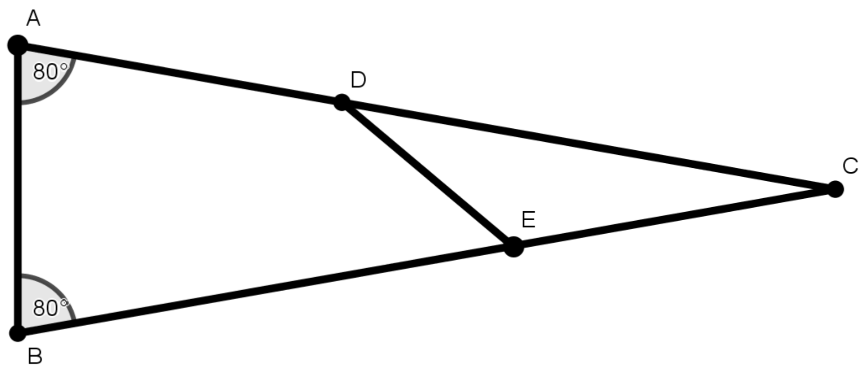
Zadání říká, že průměr věků dospělých je 44. Tedy to musí platit pro libovolný případ, a tedy i pro případ, kdy je všem 44. Stejně tak pro děti: můžeme předpokládat, že jim je všem stejně. A tím si značně zjednodušíme úlohu. Jak se počítá průměr: Sečteme nějaká čísla a vydělíme je jejich počtem. Takže nechť je dospělých D a dětí nechť je 3D (třikrát tak více než dospělých). Nechť je průměrný věk dětí X. Potom průměr všech věků bude (protože předpokládáme, že všechny děti a všichni dospělí mají stejně let): (3D × X + 44 × D) / (3D + D) = (3X + 44) / 4 = 20. Snadno vyjádříme, že X = 12.

Úloha 26

V trojúhelníku ABC je na straně BC zvolený bod E a na straně AC bod D tak, že |BE| = |DC| a zároveň |AD| = |EC|. Jak velký je úhel DEB pokud víme, že úhel |CBA| = 80° a |CDE| = 30°?

Řešení 26

Z informace, že |BE| = |DC| a zároveň |AD| = |EC| zjistíme, že |BC| = |AC|, tím pádem je trojúhelník ABC rovnoramenný. Z toho plyne, že úhly |CBA| = |BAC| = 80°. Z informace, že |CDE| = 30° víme, že |EDA| = 180° – 30° = 150°. Nyní se podívejme na čtyřúhelník BEDA. Tři z jeho úhlů víme (80°, 80°, 150°) a čtvrtý, na který se ptá zadání, máme zjistit. Součet úhlů v čtyřúhelníku je 360°, a tedy umíme dopočítat hodnotu zbývajícího úhlu DEB: 360° – 80° – 80° – 150° = 50°.



Úloha 27

Josef chodí velmi rád na zmrzlinu do své oblíbené kavárny. Nabízí tam 10 příchutí zmrzliny, z kterých je 5 ovocných: banán, citrón, jablko, malina a rybíz; a 5 smetanových: vanilka, čokoláda, kokos, pistácie, stracciatella. Josef je ale velmi vybíravý a při vytváření perfektní kombinace zmrzlin se řídí těmito pravidly:

1) Nekombinuje navzájem ovocné a smetanové kopečky. Jedinou výjimkou je malinová, kterou kombinuje i se smetanovými.
2) Pokud si dává ovocnou, dá si 3 kopečky.
3) Pokud si dává smetanovou, dá si jen 2 kopečky (pokud s nimi kombinuje malinovou, tak si dá jeden kopeček malinové a jeden kopeček smetanové).
4) Z jedné příchuti si dává maximálně 2 kopečky.
5) Banánové kopečky nikdy nekombinuje s citrónovými kopečky.
6) Jablkový kopeček nebo kopečky si dá jen tehdy, když si dá i aspoň jeden rybízový kopeček.

Kolik různých kombinací zmrzliny může Josef vytvořit? Poznámka: Kombinace, která vznikne jen přehozením pořadí kopečků se počítá jako stejná.

Řešení 27

Tato úloha vyžadovala velkou dávku trpělivosti a pozornosti. Rozdělme si zmrzliny do tří skupin:

1) Jen smetanová.
2) Malina + jeden kopeček smetanové.
3) Jen ovocná.

V první skupině máme 15 možností. V druhé jich máme jen 5. Třetí si vypišme:
BBM, BBR, BJR, BMR
CCM, CCR, CJR, CMR
JJR, JMR
MMB, MMC, MMR
RRB, RRC, RRJ, RRM
Tedy 4 + 4 + 2 + 3 + 4 = 17 možností.
Dohromady tedy máme 15 + 5 + 17 = 37 možností.

Úloha 28

Číslo nazýváme šťastné, pokud je dělitelné beze zbytku jedním z čísel 2, 3, 5, nebo 7. Kolik čísel od 1 do 100 není šťastných?

Řešení 28

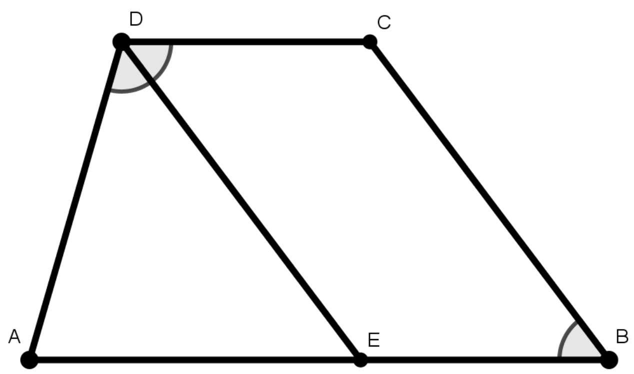
Hledáme čísla od 1 do 100, která nejsou dělitelná 2, 3, 5, nebo 7. Důležité je všimnout si, že tato čísla jsou všechna prvočísla. Každé číslo lze zapsat jako součin prvočísel. Existuje tedy nějaké číslo od 1 do 100, které lze zapsat jako součin aspoň dvou prvočísel, která nejsou 2, 3, 5, ani 7? Nejmenší takové číslo je 11 × 11 = 121, které je větší než 100. Tedy žádné takové číslo není. Tím pádem hned víme, že jediná čísla, která nám vyhovují jsou prvočísla a číslo 1: 1, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, kterých je celkem 22.

Úloha 29

V lichoběžníku ABCD se základnami AB a CD platí, že velikost úhlu ADC je dvakrát tak větší než velikost úhlu ABC. Délka strany AD je 4 cm a délka strany CD je 3 cm. Jaká je délka strany AB v centimetrech?

Řešení 29

Dokresleme si rovnoběžku s CB bodem D jako na obrázku. Bod, kde se protne s AB, nazvěme E. |EB| = |DC| = 3 cm, protože EBDC je kosodélník. Zároveň také víme, že |EDC| = |ABC|, a tedy ze zadání |ADE| = |EDC| = |ABC|. Také platí, že |ADE| = |AED|, protože ED je rovnoběžná s CB. Z toho plyne, že trojúhelník AED je rovnoramenný s rameny |AD| = |AE| = 4 cm. Nyní již jen sečteme |AB| = |AE| + |EB| = 4 + 3 = 7 cm.

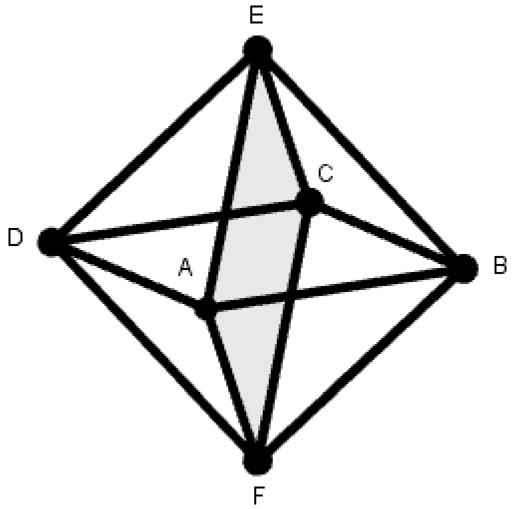


Úloha 30

ABCDEF je pravidelný osmistěn o straně 3 cm tvořený čtyřbokými jehlany ABCDE a ABCDF. Určete obsah čtyřúhelníku EAFC v cm^2.

Řešení 30

Úhel ABC je pravý. Z toho plyne, že i úhly AEC a AFC musí být pravé, protože |AE| = |EC| = |AF| = |FC| = |AB| = |BC| = 3 cm a všechny tři trojúhelníky ABC, AEC a AFC sdílí přeponu AC. Z toho již rovnou vyplývá, že čtyřúhelník EAFC je čtverec. Jeho obsah je tedy jednoduše 3 × 3 = 9 cm^2.



Úloha 31
120 euro je třeba rozdělit pěti dělníkům tak, aby druhý dělník dostal o tolik euro více než první, o kolik třetí dostal více než druhý, čtvrtý než třetí a pátý než čtvrtý. První dva dělníci mají dostat dohromady sedmkrát méně než zbylí tři dohromady. Kolik euro má dostat druhý dělník?

Řešení 31
Označme si platy dělníků po řadě a, b, c, d, e. Ze zadání víme, že b = a + x, c = b + x, d = c + x, e = d + x, kde x je počet, o který dostává další dělník více než ten předešlý. Z tohoto lze vyjádřit platy každého dělníka pomocí a a x: b = a + x, c = a + 2x, d = a + 3x, e = a + 4x. Také víme, že a + b + c + d + e = 120, a že 7 × (a + b) = c + d + e. Nyní stačí do dvou posledních rovnic dosadit za b, c, d, e: 5a + 10 x = 120 a 7 × (2a + x) = 3a + 9x, tedy 11a = 2x. Dosazením do předešlé rovnice dostáváme 5a + 55x = 120, tedy 60a = 120, tedy a = 2 a x = 11. Tím pádem první dělník má plat 2 eura, druhý 13 eur, třetí 24, čtvrtý 35 a páty 46.

Úloha 32
Barbora si napsala dvě různá celá nenulová čísla. Potom je sečetla, odečetla, vynásobila a vydělila. Dostala čtyři výsledky, jejichž součet byl –1. Když vynechala výsledek sčítání a sečetla zbylé tři výsledky, dostala také součet –1. Která celá čísla mohla Barbora původně napsat? Čísla zadejte v pořadí od nejmenšího po největší.

Řešení 32
Pojmenujme dvě čísla ze zadání A a B. Nyní dle zadání platí tyto dvě rovnice:
$(A + B) + (A \times B) + (A/B) + (A - B) = -1$
$(A \times B) + (A/B) + (A - B) = -1$
Z toho rovnou vyplývá, že A + B = 0, tedy A = –B. Tedy namísto A a B můžeme jen říct, že hledaná dvě čísla jsou A a –A. Zapišme si tedy první rovnici jen pomocí A:
$(A + -A) + (A \times -A) + (A/ - A) + (A - -A) = -1$
což upravíme na
$-(A \times A) - -1 + 2A = -1$

což dále upravíme na
$-(A \times A) + 2A = 0$
Vytkneme A:
$A \times (2 - A) = 0$
Řešením je tedy buď $A = 0$, nebo $A = 2$. Pro $A = 0$ to však být nemůže, protože zadání úlohy říká, že A musí být nenulové. Řešení je tedy 2 a –2.

Úloha 33

Anička a Maruška hrají hru s kostkami. Anička hodí najednou několika kostkami a vyhraje, pokud aspoň na jedné kostce padne šestka. Mařenka zase vyhraje, pokud Aničce nepadne ani jedna šestka. Kolika nejméně kostkami musí Anička házet, aby měla větší šanci, že vyhraje, než Mařenka?

Řešení 33

Začněme od nejjednoduššího: Co kdyby holky měly jen jednu kostku. Potom by Anička měla šanci 1/6, zatímco Mařenka by měla šanci 5/6. Takže 1 kostka určitě nestačí. Co kdyby měly dvě kostky? Potom Mařenka potřebuje, aby jí na všech kostkách padlo jedno z pěti čísel 2, 3, 4, 5, 6. Tedy Mařenka by měla šanci $5 \times 5 / 6 \times 6 = 25/36$, že vyhraje, což je více než 1/2. Co kdyby měly tři kostky? Potom by Mařenka měla šanci $5 \times 5 \times 5 / 6 \times 6 \times 6 = 125/216$, že vyhraje, což je stále ještě více než 1/2. Pro 4 kostky je to však již šance pro Mařenku $5 \times 5 \times 5 \times 5 / 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 625/1296$, což je již méně něž 1/2. Anička tedy potřebuje hrát se čtyřmi kostkami.

Úloha 34

Muž a žena spěchají na letadlo a tak oba utíkají po posuvném pásu (po směru jízdy pásu). Muž i žena mají stejně dlouhé kroky – přesně jeden metr. Muž utíká dvakrát tak rychleji než žena (tedy udělá dvakrát tolik kroků za jednotku času) a potřeboval udělat přesně 28 kroků na přeběhnutí pásu, zatímco žena jich potřebovala jen přesně 21. Kolik metrů měří posuvný pás?

Řešení 34

Řešení 1: Nechť je rychlost pásu s, a rychlost ženy v. Nechť je délka pásu l metrů. Potom mužova rychlost je $2v$. Když se muž i žena pohybovali po pásu, tak část cesty je odvezl pás a část cesty posunuli oni sami sebe během. Poměr toho, kolik urazili díky pásu a díky běhu je stejný jako poměr jejich rychlosti a rychlosti pásu. Pro muže je tento poměr: $(l-28)/28 = s/2v$. Podobně pro ženu, poměr je $(l-21)/21 = s/v$. Pokud vyjádříme s z obou rovnic, dostáváme: $s = 2v(l - 28)/28$ a $s = v(l - 21)/21$. Dejme obě rovnice dohromady a po pár úpravách dostáváme $l - 3 \times 28 = 2l - 2 \times 21$, z čehož nám vyjde, že $l = 42$.

Řešení 2: Představme si, že pohyblivý pás je delší. Poté, co žena udělá 21 kroků, muž už jich má udělaných $21 \times 2 = 42$. Na přeběhnutí pásu potřeboval muž 28 kroků, a tedy ušel 42–28 = 14 kroků navíc. Protože na přeběhnutí celého pásu potřebuje muž 28 kroků, tak 14 extra kroků po pásu znamená, že ušel o polovinu délky pásu více. Muž a žena jsou nyní vzdálení 42 – 21 = 21 kroků a muž ušel 1,5 pásu a žena 1 délku pásu, takže 21 kroků odpovídá délce půlky pásu. Tím pádem musí být celý pás dlouhý $2 \times 21 = 42$ kroků či metrů.

Úloha 35

Marián si nakreslil lichoběžník ABCD se základnami AB a CD. V tomto lichoběžníku označil P průsečík jeho uhlopříček. Zjistil, že obsah trojúhelníku ABP byl 16krát větší než obsah trojúhelníku CDP. Dále dokreslil přímku rovnoběžnou se stranou AD, která procházela bodem C a která protľala stranu AB v bodě E. Podobně dokreslil rovnoběžku se stranou BC, která procházela bodem D a která protľala stranu AB v bodě F. Určete velikost poměru |AE|:|EF|:|FB|.

Řešení 35

Když si nakreslíme daný lichoběžník zjistíme, že vypadá podobně jako na obrázku. Ze zadání víme, že |AE| = |DC| = |FB|. Trojúhelníky ABP a CDP jsou si podobné. Tedy poměr výšky ABP a základny AB je stejný jako poměr výšky CDP a CD. Protože obsah trojúhelníku je výška krát základna děleno dvěma, a poměr obsahů obou trojúhelníků je 1:16, musí být poměr jejich základen 1:4, tedy |AB| = 4|CD|. Nyní víme, že |AB| = |AE| + |EF| + |FB| = 4|CD| = |CD| + |EF| + |CD|, víme, že |EF| = 2|CD|. Poměr |AE|:|EF|:|FB| je tedy 1:2:1.