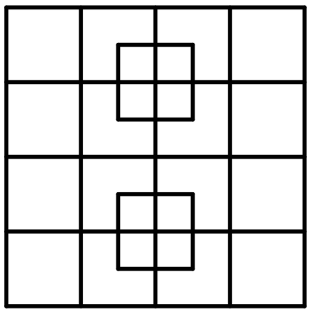
Vzorová řešení MatX 2019

matx.p-mat.sk

28. března 2019

Úloha 1
Kolik čtverců je na obrázku?



Řešení 1
Abychom zabránili počítání některých čtverců dvakrát, udělejme si systém a spočítejme vždy počet čtverců jedné velikosti dohromady. Tyto počty poté sečteme a dostaneme odpověď.
1×1: 16 + 2 = 18
2×2: 9
3×3: 4
4×4: 1
Malé 1×1 uprostřed: 8
Celkem tedy 18 + 9 + 4 + 1 + 8 = 40 čtverců.

Úloha 2
V zahradě stojí dva stromy – třešeň a hruška. Na obou stromech sedí několik ptáků. Pokud by jeden z ptáků z třešně přeletěl na hrušku, na hrušce by bylo dvakrát více ptáků než na třešni. Pokud by jeden z ptáků z hrušky přeletěl na třešeň, na obou stromech by byl stejný počet ptáků. Kolik ptáků sedí na hrušce?

Řešení 2
Označme si počty ptáků na stromech T a H. Dvě podmínky ze zadání můžeme zapsat pomocí rovnic:

$$H + 1 = 2 \times (T - 1) \tag{1}$$
$$H - 1 = T + 1 \tag{2}$$

Z druhé rovnice vyjádříme, že $H = T + 2$. Dosadíme-li tento výsledek do první rovnice, získáme rovnici $T + 2 + 1 = 2 \times (T - 1)$, z čehož nám vyjde, že $T = 5$, a tedy $H = 7$. Na třešni tedy je 5 ptáků a na hrušce 7.

Úloha 3

Dva spolužáci hrají karty o jablka, přičemž vítěz partie vždy dostane jedno jablko od poraženého. V hře, kterou hrají, není možná remíza. Na konci vyučování jeden z nich už vyhrál tři partie, zatímco druhý za ten den dohromady získal tři jablka. Kolik her hráli?

Řešení 3

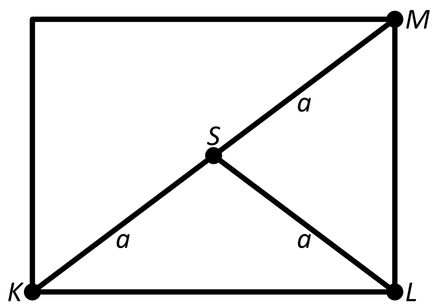
První spolužák vyhrál tři partie, tedy musel nutně od druhého spolužáka dostat tři jablka. Druhý spolužák však za ten den získal celkově tři jablka, tedy musel vyhrát šest partií – tři na to, aby dostal zpátky tři jablka a tři na to, aby ještě navíc získal tři jablka. Celkem tedy hráli devět partií, tři vyhrál první spolužák a šest druhý.

Úloha 4

Holky si hrají v obdélníkové zahradě. Do třech rohů zahrady se postavily postupně Karin, Lenka a Monika a do středu zahrady se postavila Sára. Nejdříve si Karin a Lenka natáhly mezi sebou modré 8metrové lano. Potom se k nim přidala Sára, a tak natáhly mezi sebou do trojúhelníku červené 18metrové lano. Nakonec chtěly zapojit i Moniku, a tak natáhly zelené 16metrové lano do trojúhelníku mezi Lenkou, Monikou a Sárou. Jak dlouhé lano v metrech by potřebovaly, kdyby se Sára postavila do čtvrtého rohu zahrady a chtěly by si natáhnou lano mezi sebou po obvodě zahrady?

Řešení 4

Na obrázku vidíme, jak děvčata stála v zahradě. Víme, že $|KS| = |LS| = |MS|$, protože každá z nich má délku poloviny uhlopříčky obdélníku. Označme si tedy jejich společnou délku a. Ze zadání víme, že $|KL| = 8$ m, $a + a + 8$ m = 18 m, $a + a + |ML| = 16$ m. Rovnou tedy zjišťujeme, že $a = 5$ m. Z toho také vyplývá, že $|ML| = 6$ m. Původní otázka lze přeformulovat na otázku, jaký je obvod zahrady. Protože známe délku obou stran obdélníku, umíme to spočítat: (8 + 8 + 6 + 6) m = 28 m.



Úloha 5

Po dokončení stavby zadal vedoucí dělníkovi rozřezat zbylé dřevěné trámy na menší kusy, vhodné na topení. Dělník se zeptal, kolik za to dostane zaplaceno. Vedoucí ho tedy nechal rozřezat jeden trám na tři kusy a změřil mu čas. Protože vedoucí věděl, kolik dostává dělník na hodinu, řekl mu, že tohle by bylo za 80 centů. Kolik euro dostal dělník, pokud rozřezal 5 trámů na 3 kusy, 17 trámů na 4 kusy, 8 trámů na 5 kusů a 2 dlouhé trámy na 7 kusů?

Řešení 5

Na této úloze je zákeřné to, že musíme počítat plat za řezy, nikoliv za kusy. Když tedy dělník rozřezal první trám na zkoušku, rozřezal ho na tři kusy, ale provedl jen dva řezy. Tím pádem je cena za 1 řez 40 centů. Nyní již jen zbývá spočítat celkový počet řezů, který musel dělník udělat. Ten lze vypočítat jako (počet trámů) krát (počet kusů mínus 1), tedy celkem 5 × 2 + 17 × 3 + 8 × 4 + 2 × 6 = 105 řezů. Za každý dostal 40 centů, tedy 0,4 eura, tedy celkem dostal zaplaceno 105 × 0,4 = 42 euro.

Úloha 6

V následujícím příkladu nahraď každé písmeno cifrou, přičemž stejná písmena musí být nahrazena stejnou cifrou a různá písmena různými ciframi.

```
A A B B A
- C C B B
---------
A B C B A
```

Jaká je hodnota pěticiferného čísla ABCBA?

Řešení 6

Přepišme si příklad jako součet:

```
A B C B A
+ C C B B
---------
A A B B A
```

Ze součtu na řádu jednotek vidíme, že B musí být 0, aby platilo, že A + B = A. Jakmile víme toto, vidíme, že musí platit C + C = 10, tedy C = 5. Poté již snadno dopočítáme, že A = 6. ABCBA je tedy 60506.

Úloha 7

Pokud je číslo dělitelné 17, říkáme o něm, že je šťastné. Pokud je číslo dělitelné 13, říkáme o něm, že je dobré. Kolik přirozených čísel větších než nula a menších než 20000 je šťastných i dobrých zároveň?

Řešení 7

Všimněme si, že obě čísla (13 i 17) jsou prvočísla. Tím pádem budou čísla, která jsou šťastná i dobrá zároveň, jen čísla, která jsou násobky součinu těchto dvou čísel. Součin 13 a 17 je 221. Stačí tedy spočítat, kolik je násobků 221 menších než 20000, tedy mezi čísly 1 až 19999. Těch je 19999 / 221 zaokrouhlené dolů, tedy 90.

Úloha 8

Perfektní zamíchání 10 karet provedeme takto:

1. Položíme karty na sebe na jeden balíček a poté je rozdělíme na dva balíčky – vrchních 5 karet a spodních 5 karet.
2. Tyto dva balíčky dáme opět dohromady tak, že karty jsou na střídačku z balíčku 1, 2, 1, 2, ...

(Tedy například 6 karet očíslovaných 1, 2, 3, 4, 5, 6 a seřazených v tomto pořadí by po perfektním zamíchání bylo seřazeno 1, 4, 2, 5, 3, 6.) Máme seřazený balíček 10 karet. Kolikrát ho musíme perfektně zamíchat, aby byly karty opět v původním pořadí?

Řešení 8

Zatímco existuje i obecný vzorec, u této úlohy bylo nejjednodušší řešení si vypsat prvních několik zamíchání a všimnout si, že po šesti zamícháních se vrátíme k původnímu zamíchání:

Původní: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
První: 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10
Druhé: 1, 8, 6, 4, 2, 9, 7, 5, 3, 10
Třetí: 1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 10
Čtvrté: 1, 5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 10

Páté: 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10
Šesté: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Úloha 9

Honza chce odměřit 6 minut pomocí přesýpacích hodin. Má však jen takové, co se přesypají za 5 minut a takové, co se přesypají za 4 minuty. Kolikrát minimálně musí Honza během měření otočit nějaké hodiny (včetně prvních otočení hodin)?

Řešení 9

Na jedno otočení určitě nedovedeme odměřit šest minut, protože umíme odměřit buď 4, nebo 5 minut. Na dvě otočení umíme odměřit 4 minuty, 5 minut, 9 minut (spustíme druhé po dokončení prvních), nebo 1 minutu (spustíme obě zároveň a měříme čas od okamžiku dosypání 4minutových). Stále však neumíme odměřit šest minut. Zkusme tedy na tři otočení. Toto již jde:

- Čas 0: Otočíme oboje hodiny. (2 otočení)
- Čas 4: 4minutové se dosypaly. Od této chvíle začínáme měřit čas, avšak 4minutové již neotáčíme. (0 otočení)
- Čas 5: 5minutové se dosypaly, otočíme je. (1 otočení)
- Čas 10: 5minutové se dosypaly. Tímto jsme odměřili čas od 4. do 10. minuty, což je 6 minut. (0 otočení)

Potřebujeme tedy hodiny otočit minimálně třikrát.

Úloha 10

V následující rovnici nahraď každé písmeno cifrou 1 až 9, přičemž stejná písmena musí být nahrazena stejnou cifrou a různá písmena různými ciframi:

$$AB - BA = 54$$

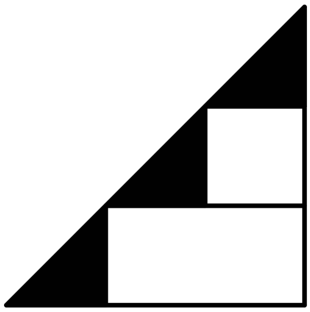
Kolik různých možností nahrazení písmen ciframi existuje?

Řešení 10

Protože musí vyjít výsledek 54 a AB i BA jsou nutně dvojciferná čísla (tedy alespoň 10), musí být A určitě alespoň 6. Stačí tedy vyzkoušet 4 možnosti pro A = 6, A = 7, A = 8 a A = 9.
A = 6: V tomto případě by B muselo být 0, aby příklad vyšel. Toto však nevyhovuje zadání.
A = 7: V tomto případě vyhovuje B = 1, protože 71 — 17 = 54.
A = 8: V tomto případě vyhovuje B = 2, protože 82 — 28 = 54.
A = 9: V tomto případě vyhovuje B = 3, protože 93 — 39 = 54.
Úloha má tedy tři možná různá nahrazení písmen ciframi.

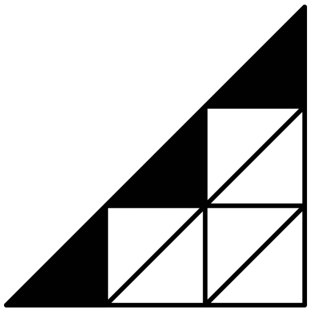
Úloha 11

Na obrázku je rovnoramenný trojúhelník, do kterého jsou vepsané dva obdélníky tak, že přepona je vrcholy obdélníků rozdělená přesně na třetiny. Jaký je poměr černě vybarvené části k obsahu celého trojúhelníku?



Řešení 11

Pokud si do obrázku dokreslíme čtyři úsečky jako na obrázku níže, v trojúhelníku vznikne 9 shodných menších trojúhelníčků. Ty jsou shodné proto, že všechny mají pravý úhel a strany, které ho svírají, mají shodné délky. Jelikož černě vybarvená část pokrývá 3 trojúhelníčky a na celé ploše trojúhelníku je jich celkem 9, je poměr černé části k obsahu celého trojúhelníku 3 / 9 = 1 / 3.

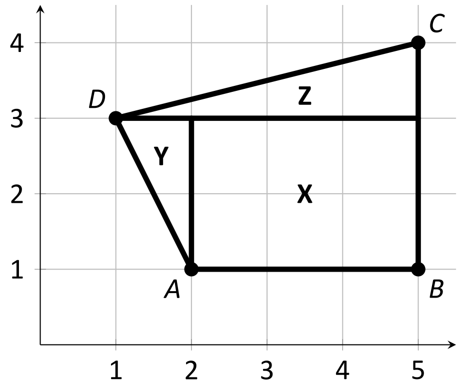


Úloha 12

Lukáš si v souřadnicové soustavě zakreslil body A na (2; 1), B na (5; 1), C na (5; 4) a D na (1; 3). Jaký je obsah v cm^2 čtyřúhelníku ABCD, pokud je úsečka AB dlouhá 3 cm?

Řešení 12

Nakresleme si zadaný útvar a rozdělme ho na tři části jako na obrázku. Část X má obsah 3 × 2 = 6 cm^2, část Y má obsah 1 × 2 / 2 = 1 cm^2, část Z má obsah 4 × 1 / 2 = 2 cm^2. Celkový obsah je tedy 6+1+2 = 9 cm^2.



Úloha 13
Kolik dvojic hran, které jsou navzájem rovnoběžné, má kvádr?

Řešení 13
Kvádr má celkem 12 hran, v čemž jsou tři čtveřice hran, které jsou spolu navzájem rovnoběžné. Mezi čtyřmi hranami je však 4 × 3 / 2 = 6 dvojic hran, které jsou spolu navzájem rovnoběžné. Celkem tedy existuje 6 + 6 + 6 = 18 dvojic hran, které jsou spolu rovnoběžné.

Úloha 14
Kolik existuje 6ciferných palindromů dělitelných 6 takových, že první cifra je o tři větší než druhá cifra a druhá cifra je o tři větší než třetí cifra? Poznámka: Palindrom je číslo, které je při čtení zepředu stejné jako při čtení zezadu, tedy například 1234321 je palindrom.

Řešení 14
Kvůli podmínce o prvních třech cifrám máme jen čtyři možnosti, jaké můžou být první tři cifry: 630, 741, 852, nebo 963. Tím pádem dostáváme čtyři možnosti, jak můžou vypadat 6ciferné palindromy: 630036, 741147, 852258, nebo 963369. V zadání je však ještě podmínka ohledně dělitelnosti šesti, které vyhovují jen 630036 a 852258, tedy celkem dvě čísla.

Úloha 15
Podle legendy byl rok 234 magický. Podle té samé legendy platí, že pokud je rok magický, tak je i rok za ciferný součet tohoto roku magický (tedy rok 234 + (2 + 3 + 4) = 243 je magický). Je rok 2019 magický?

Řešení 15
Tato úloha lze řešit buď vypisováním čísel až po 2019, anebo mnohem rychleji, pokud se zamyslíme. Pojďme se tedy zamyslet. Pravidlo dělitelnosti devíti říká, že číslo je dělitelné devíti tehdy a právě tehdy, pokud je jeho ciferný součet dělitelný devíti. 234 je dělitelné devíti, protože 2 + 3 + 4 = 9. Další magický rok získáme tak, že k 234 přičteme jeho ciferný součet. Protože tento ciferný součet je dělitelný devíti, bude i další magický rok dělitelný devíti. Tohle bude platit napořád, protože vždy získáme magický rok dělitelný devíti a opět k němu přičteme násobek devítky, čímž opět získáme magický rok dělitelný devíti. Protože 2019 není dělitelné devíti, není to ani magický rok.

Úloha 16
V souřadnicové soustavě jsou úsečkou spojené body na souřadnicích (0; 0) a (36; 84). Kolika mřežovými body souřadnicové soustavy kromě bodů A a B prochází úsečka AB?

Řešení 16
Pokud si upravíme zlomek 36 / 84 do základního tvaru, dostaneme 36 / 84 = 3 / 7. Nyní si nakresleme spojnici bodů (0; 0) a (3; 7) – vidíme, že prochází pouze mřežovými body (0; 0) a (3; 7), protože 3 a 7 mají největší společný dělitel pouze 1. Pokud však tuto spojnici za sebe na přímku naskládáme 12krát, dostaneme úsečku AB. To proto, že posun 12krát o (3; 7) nás dostane na bod (12 × 3; 12 × 7) = (36; 84). Tím pádem rovnou vidíme, že úsečka AB bude procházet 13 mřežovými body (včetně A a B), protože na každou úsečku připadá jeden bod + jeden extra na konci. Po odečtení dvou koncových bodů A a B dostáváme výsledek 11 mřežových bodů.

Úloha 17

Dvě třídy, 8. A a 8. B, jednou na školní výlet do Tater a jejich třídní učitelé kupují lístky na vlak z Frýdlantu nad Ostravicí do Popradu. S každou třídou jede na výlet její třídní učitel. Dospělý lístek je dražší, ale ne více než dvakrát než dětský lístek. Třídní učitel 8. A zaplatí za svůj lístek a lístky pro děti 99 euro. Třídní učitel 8. B, kde je o čtyři žáky více než v 8. A, zaplatí za svůj lístek a lístky pro děti 115 euro. Jak drahý v eurech je lístek pro jednoho učitele?

Řešení 17

Označme si cenu dětského lístku d, cenu učitelského lístku u a počet žáků z. Potom ze zadání víme, že:

$$u + z \times d = 99 \tag{1}$$

$$u + (z + 4) \times d = 115 \tag{2}$$

Nyní se zbavme v obou rovnicích neznámých d a u tak, že od druhé rovnice odečteme první rovnici:

$$u + (z + 4) \times d - u + z \times d = 115 - 99$$
$$4d = 16$$

Tímto jsme zjistili, že $d = 4$, tedy cena dětského lístku je 4 eura. Zbývá určit cenu učitelského lístku. Nyní využijeme toho, že $u > d$ a zároveň u není více než 2d, tedy cena učitelského lístku je někde mezi 4 a 8 eury. Tím pádem v první rovnici musel učitel zaplatit za děti někde mezi 91 a 95 eury. Cena dětského lístku je však čtyři eura, tedy celková cena za děti musí být dělitelná čtyřmi. Jediné číslo mezi 91 a 95 dělitelné čtyřmi je 92. Z toho již vyplývá, že cena za lístek pro učitele byla 99 − 92 = 7 euro.

Úloha 18

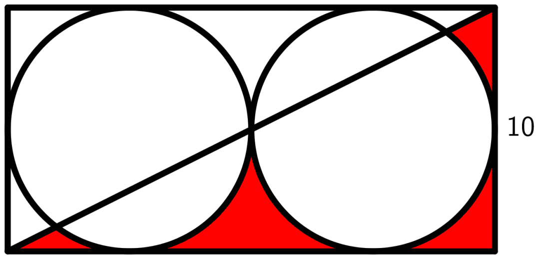
Sestry Jane, Elizabeth, Kitty a Lydia ve svém volném čase vyšívají. Na začátku mají dohromady 200 perliček. Jane dala Elizabeth během vyšívání 26 svých perliček, Elizabeth zase dala Kitty 36 perliček, Kitty dala Lydii 32 perliček a Lydie dala Jane 4 perličky. Všechny sestry použily všechny perličky, které měly. Když dovyšívaly, s překvapením zjistily, že všechny na svá díla použily stejný počet perliček. Kolik perliček měla Jane před vyšíváním?

Řešení 18

Vypišme si matematicky, co víme ze zadání:
$J + E + K + L = 200$
$J \rightarrow E$: 26, $E \rightarrow K$: 36, $K \rightarrow L$: 32, $L \rightarrow J$: 4.
Když od původního počtu perliček, co každá ze sester měla, odečteme perličky, které dala, a přičteme perličky, které dostala, musíme ze zadání dostat stejný počet, tedy platí:
$J - 26 + 4 = E - 36 + 26 = K - 32 + 36 = L - 4 + 32$
$J - 22 = E - 10 = K + 4 = L + 28$
Protože víme, že všechny sestry použily všechny perličky, musí i na konci platit, že celkový součet perliček je 200, tedy musí platit, že $4 \times (J - 22) = 200$, z čehož vyjádříme, že $J = 72$, tedy Jane měla před vyšíváním 72 perliček.

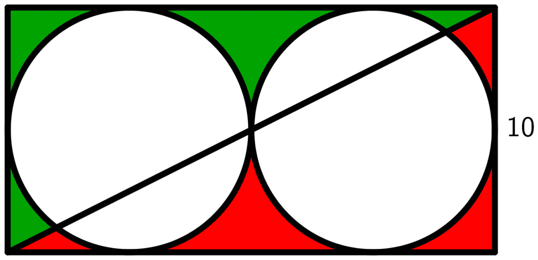
Úloha 19

Jaký je obsah červených částí v cm^2?



Řešení 19

Vybarvěme si v obrázku zeleně zbylé části, které nejsou vybarvené červeně ani neleží v žádném z kruhů. Díky středové symetrii podle středu obdélníku jsou zelené části shodné s červenými a tudíž mají stejný obsah. Červený obsah je tedy polovina z (obsah obdélníku mínus obsah obou kruhů) = $(10 \times 20 - \pi \times 5^2 \times 2)/2 = 100 - 25\pi$, což je přibližně 21,46 cm^2.



Úloha 20

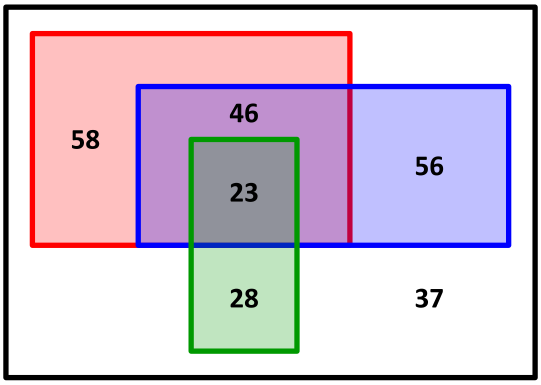
Blecha sedí na napnutém provázku a chce se dostat pomocí 10 skoků o 60 cm doprava. Blecha umí dělat pouze 10 cm skoky, ale může skákat doprava i doleva. Kolika různými posloupnostmi skoků se umí blecha dostat o 60 cm doprava?

Řešení 20

Blecha se potřebuje na 10 skoků dostat o 60 cm doprava, potřebuje tedy udělat dva skoky doleva (o 20 cm) a osm skoků doprava (o 80 cm). Může to však udělat v různém pořadí, například LLPPPPPPPP, nebo LPPPPPPPPL (při značení L = doleva, P = doprava). Chceme spočítat, kolik existuje různých takových posloupností. Vzhledem k tomu, že skoky doleva mezi sebou nerozlišujeme ani skoky doprava mezi sebou nerozlišujeme, tak nám stačí vypočítat, kolika způsoby umíme vybrat mezi deseti skoky dva skoky doleva. První skok umíme vybrat z deseti různých skoků, druhý skok umíme vybrat z devíti různých skoků. Celkem tedy je $10 \times 9 = 90$ možností. Avšak pozor, v tomto případě jsme započítali dvakrát každou možnost, protože jsme odlišovali mezi prvním a druhým skokem. Abychom dostali správný výsledek potřebujeme ještě vydělit dvěma, celkem je tedy 45 různých možností.

Úloha 21

Karel se procházel po jídelně a ptal se spolužáků, které ze tří nabízených jídel mají rádi. Výsledky si potom zaznačil do takovéhoto grafu. Na základě grafu rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou nepravdivá. Jako odpověď zadejte součet čísel, kterými jsou označená nepravdivá tvrzení.
1) Pokud má někdo rád guláš a halušky, tak má rád i smažený sýr.
2) Více než polovina lidí má ráda halušky.
4) 37 lidi nemá právě jedno oblíbené jídlo.
8) Více než 84 % lidí má rádo aspoň jedno nabízené jídlo.
16) Smažený sýr má rádo dvakrát tak více lidí než guláš.
32) Kdyby se přestaly vařit halušky, více než polovina lidí by si neměla co vybrat.
64) Pokud má někdo rád halušky i smažený sýr, tak má rád i guláš.
128) Méně než polovina lidí má ráda právě jedno jídlo.



Legenda:
Černá: Všichni
Červená: Mají rádi halušky
Modrá: Mají rádi smažený sýr
Zelená: Mají rádi guláš

Řešení 21

Projděme si výroky jeden po druhém a určeme si, které jsou pravdivé a které ne. Poté potřebujeme jen sečíst čísla nepravdivých:
1) Pravdivý. Neexistují lidi, kteří mají rádi jen guláš a halušky, ale ne smažený sýr.
2) Pravdivý. Konkrétně (58 + 46 + 23) / (58 + 46 + 23 + 56 + 28 + 37) = 51 % má rádo halušky.
4) Nepravdivý. Všichni, co mají rádi kombinaci aspoň dvou jídel spadají také do této kategorie, správný počet lidí by tedy byl 37 + 23 + 46.
8) Pravdivý. Konkrétně (58 + 46 + 23 + 56 + 28) / (58 + 46 + 23 + 56 + 28 + 37) = 85 % lidí má rádo aspoň jedno nabízené jídlo.
16) Nepravdivý. 46 + 23 + 56 = 125 má rádo smažený sýr, 23 + 28 = 51 má rádo guláš. 51 × 2 = 102, což není rovné 125.
32) Nepravdivý. Kdyby přestali vařit halušky, tak by si neměli co vybrat jen ti, kteří mají rádi jen halušky. Těch je pouze 58, což je jen 23 %.
64) Nepravdivý. Existuje 46 lidí, kteří mají rádi oboje, ale ne guláš.
128) Nepravdivý. (58 + 56 + 28) / (58 + 46 + 23 + 56 + 28 + 37) = 57 %.
Celkový součet nepravdivých výroků je 4 + 16 + 32 + 64 + 128 = 244.

Úloha 22

Najděte největší číslo takové, že každé jeho dvě po sobě jdoucí cifry tvoří dvoucifernou druhou mocninu přirozeného čísla. Poznámka: Druhá mocnina je číslo, které se dá zapsat jako součin dvou stejných přirozených čísel.

Řešení 22

Zde jsou všechny dvojciferné druhé mocniny přirozených čísel: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Z těchto čísel tedy potřebujeme sestavit co největší číslo. Vyzkoušejme, jak velké číslo dostaneme, pokud hledané číslo bude začínat popořadě jednotlivými mocninami: 1649, 25, 3649, 49, 649, 81649. Všechna čísla končí pětkou nebo devítkou, protože neexistuje dvojciferná druhá mocnina začínající pětkou nebo devítkou. Největší z nich je 81649.

Úloha 23

Starý muž zemřel a zanechal po sobě 10 000 eur, které se měly rozdělit mezi šest dědiců – jeho tři syny s manželkami. V závěti nadělil každému z dědiců částku podle zásluh a to následovně:
Manželky dostaly dohromady 3 960 eur, přičemž Ivana dostala o 100 eur více než Aneta a Daniela dostala o 100 eur více než Ivana. Petr dostal dvakrát tak více než jeho manželka, Erik dostal stejnou sumu jako jeho manželka a Marián dostal o polovinu více než jeho manželka.
Kdo je manžel Anety?

Řešení 23

Označme si množství peněz, které každý dostal, počátečním písmenem jejich jména. Ze zadání víme, že A + I + D = 3960 a zároveň I = A + 100, D = I + 100. Do třetí rovnice můžeme dosadit z druhé rovnice a dostaneme, že D = A + 200. Pokud toto a druhou rovnici dosadíme do první rovnice, dostáváme A + A + 100 + A + 200 = 3A + 300 = 3960. Z toho plyne, že A = 1220, I = 1320 a D = 1420.

Nyní existuje 6 možností, kdo je s kým vzatý:
1. A + P, I + E, D + M
2. A + P, I + M, D + E
3. A + E, I + M, D + P
4. A + E, I + P, D + M
5. A + M, I + P, D + E
6. A + M, I + E, D + P

Pro každou možnost dle informací ze zadání vypočítáme, kolik zdědí manželé. Avšak jen v jednom případě, konkrétně 3. A + E = 2440, I + M = 3300, D + P = 4200 vyjde součet všech dědictví rovný 10000 eur. Aneta má tedy za manžela Erika.

Úloha 24

Máme dva stejné hrnky, ten vlevo je naplněný mlékem a ten vpravo čajem. Přelijeme lžíci čaje z pravého hrnku do levého a pořádně zamícháme. Nyní je v hrnku vlevo směs s hodně mlékem a málo čajem. Z této směsi přeneseme jednu lžíci tekutiny do pravého hrnku. Oba hrnky tak mají stejné množství tekutiny. Je více čaje v mléku v hrnku vlevo, nebo mléka v čaji v hrnku vpravo?
A) Vlevo
B) Vpravo
C) V obou stejně
D) Nejde určit

Řešení 24

Mějme na začátku x litrů mléka vlevo, x litrů čaje vpravo a lžičku o velikosti s litrů. Nyní si nakresleme tabulku, kde popíšeme stavy po jednotlivých krocích:

Mléko	Čaj	Mléko	Čaj
x	0	0	x
x	s	0	$x - s$
$x - \frac{x}{x+s}s$	$s - \frac{s}{x+s}s$	$\frac{x}{x+s}s$	$x - s + \frac{s}{x+s}s$

Pokud upravíme výrazy ve spodním řádku, dostaneme:

Mléko	Čaj	Mléko	Čaj
$\frac{x^2}{x+s}$	$\frac{s^2}{x+s}$	$\frac{s^2}{x+s}$	$\frac{x^2}{x+s}$

Tedy správná odpověď je C) tedy že poměry čaj k mléku v levé sklenici a mléko k čaji v pravé sklenici budou stejné.

Úloha 25

Fedor má kostku. Ta je ale škaredá, a tak zvětšil jeden její rozměr o 1 cm a jiný zmenšil o 1 cm. Třetí rozměr nechal nezměněný. Objem kostky se tak zmenšil o 6 cm^3. Jaký byl objem původní kostky v cm^3?

Řešení 25

Označme délku hrany původní kostky a. Potom ze zadání platí:

$$\begin{aligned}(a+1)\times(a-1)\times a+6 &= a\times a\times a\\(a\times a-1)\times a+6 &= a\times a\times a\\a\times a\times a-a+6 &= a\times a\times a\\a &= 6.\end{aligned}$$

Délka hrany původní kostky byla 6 cm, tedy její obsah byl $6 \times 6 \times 6 = 216$ cm^3.

Úloha 26

Jarka dostala na narozeniny speciální kalkulačku. Má totiž jen jedno tlačítko, které udělá s číslem na displeji vždy to samé. Vždy vynásobí číslo na displeji samo sebou, odečte jisté číslo č a vzniklým číslem přepíše číslo na displeji. Jarka stiskla tlačítko v okamžiku, když na displeji svítilo její oblíbené číslo. Dostala tak na displeji číslo 44. Kdyby stiskla tlačítko v okamžiku, kdy by na displeji bylo číslo o 1 větší než její oblíbené číslo, dostala by na displeji číslo 63. Jaké je hodnota čísla č?

Řešení 26

Označme si Jarčino oblíbené číslo j. Potom ze zadání platí:

$$44 = j\times j - c\times c \qquad (1)$$

$$63 = (j+1)\times(j+1) - c\times c = j\times j + 2\times j + 1 - c\times c \qquad (2)$$

Pokud odečteme první rovnici od druhé, dostáváme:

$$63 - 44 = 2 \times j + 1$$
$$19 = 2 \times j + 1$$
$$j = 9$$

Jakmile víme Jarčino oblíbené číslo, snadno již dopočítáme hodnotu $č = 37$.

Úloha 27

Když Tibor cestoval do Polska, pozoroval auta jedoucí v protisměru. Překvapilo ho, že auta jela vždy stejnou neměnící se rychlostí jako on a v stejných rozestupech – co minutu potkal jedno auto. Po chvíli jízdy zjistil, že to bylo způsobené tím, že na hraničním přechodu pouštěli auta tak, že odjížděla v stejných časových rozestupech. Jaký byl časový rozdíl v minutách mezi okamžiky puštění dvou po sobě následujících aut, která Tibor potkal?

Řešení 27

Auta, která Tibor potkává v protisměru, mají mezi sebou stejný rozestup délky *d*. V okamžiku, kdy Tibor potká auto, tak on a další auto, které za chvíli potká, musí společně urazit vzdálenost *d*. Tím, že jedou oba stejnou rychlostí proti sobě platí, že Tibor i auto v protisměru urazí oba vzdálenost $d/2$.

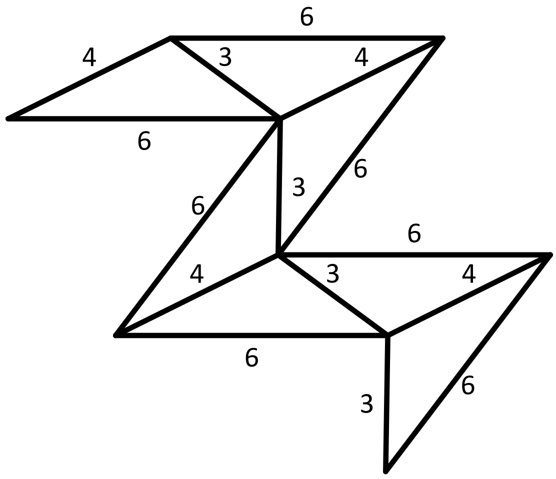
Nyní si představme, že by se Tibor zastavil v okamžiku, kdy potkal auto v protisměru. Najednou potřebuje následující auto v protisměru překonat dvojnásobnou vzdálenost, protože mu Tibor nejede naproti. Tím pádem mu to bude trvat 2 minuty místo jedné, než dojede k Tiborovi. Z toho plyne, že rozestup mezi auty je 2 minuty.

Úloha 28

Jonáš má stavebnici, v které je sedm dřevěných trojúhelníků, každý s délkami stran 3, 4 a 6 cm. Jonáš je začal pokládat na stůl a to tak, že vždy přiložil nový trojúhelník celou stranou k jednomu z trojúhelníků, které už byly na stole. Takhle by je chtěl položit dotýkající se na stůl tak, aby vznikl 9úhelník s co největším obvodem. Jaký největší obvod v cm mohl mít tento 9úhelník?

Řešení 28

Abychom dosáhli co největšího obvodu, potřebujeme nechat na obvodu co nejvíce stran trojúhelníků s délkou 6 cm. Přikládáme tedy trojúhelníky k sobě jen stranami s délkami 3 cm a 4 cm, čímž vznikne řetěz trojúhelníků jako na obrázku. Jeho celkový obvod je $7 \times 9 + 3 + 4 = 49$ cm.



Úloha 29

Rodiče mají sedm dětí a jejich věky jsou 1, 3, 5, 7, 9, 11 a 13. Součet jejich věků je 49, což je druhá mocnina (tedy číslo, které se dá zapsat jako součin dvou stejných přirozených čísel). Za kolik roků bude znova součet věků těchto sedmi dětí druhá mocnina nějakého přirozeného čísla?

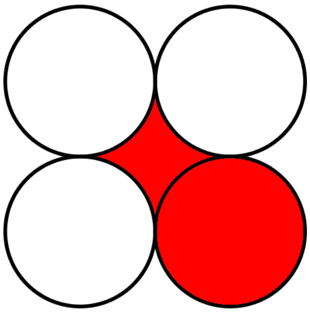
Řešení 29

Tím, že je dětí sedm, stoupne každý rok součet jejich věků o sedm. Tím pádem za x roků bude součet jejich věků rovný $49 + 7x$, což lze upravit na $7 \times (7 + x)$. Chceme, aby toto číslo bylo co nejmenší druhá mocnina přirozeného čísla. Druhá mocnina se mimo jiné pozná tak, že v jejím rozkladu na prvočinitele se vyskytuje každý prvočinitel sudý počet krát. Potřebujeme tedy, aby se v součinu $7 \times (7 + x)$ vyskytoval každý prvočinitel sudý počet krát.

Výraz $7 + x$ tedy musí být dělitelný sedmi, aby se v součinu prvočinitelů vyskytovala sedmička dvakrát. Nejmenší takový možný je pro $x = 7$, avšak tehdy dostáváme rozklad na prvočinitele $7 \times (7 + 7) = 7 \times 14 = 7 \times 7 \times 2$, kde je jen jedna dvojka. Druhý nejmenší opět nevyhovuje, protože pro $x = 14$ dostáváme rozklad $7 \times 7 \times 3$. Avšak pro třetí nejmenší $x = 21$ již dostáváme rozklad $7 \times 7 \times 2 \times 2 = 196$, což je druhá mocnina, protože $14 \times 14 = 196$. Odpověď je tedy za 21 roků.

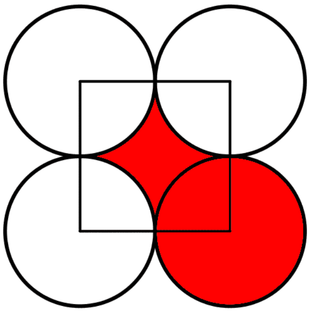
Úloha 30

Dorota má doma sporák se čtyřmi plotnami, každá s průměrem 10 cm. Jednou si chtěla k obědu uvařit mrkvovou polévku, ale protože na ni nedala pozor, část polévky ji vytekla a polila část sporáku, která je na obrázku vybarvená červeně. Jaký je obsah polité části sporáku v cm^2?



Řešení 30

Pokud si dokreslíme do obrázku čtverec, který spojuje středy všech kruhů, vidíme, že politá část mezi plotnami má obsah (plocha čtverce) — (čtyři krát plocha čtvrtkruhu). Tedy celková politá plocha je: $5 \times 5 \times \pi + 10 \times 10 - 4 \times 5 \times 5 \times \pi/4 = 25 \times \pi + 100 - 25 \times \pi = 100$ cm^2.



Úloha 31

Dorota zase kutí v kuchyni. Tentokrát si vzala dvě litrové nádoby a do každé z nich připravila šťovíkovou šťávu. V první nádobě je smíchaná voda a šťovík v poměru 3:1. V druhé nádobě je voda a šťovík smíchán v poměru 4:1. Dorota ochutná šťávy z obou nádob, ale ani jedna šťáva se jí nezdá správně namíchaná. Vezme proto velký hrnec, do kterého vylije obsahy obou nádob. V jakém poměru jsou pak v tomto hrnci voda a šťovík?

Řešení 31

V první nádobě je voda ku šťovíku v poměru 3:1, v druhé nádobě 4:1. Protože to jsou obě litrové nádoby, tak v první nádobě je tedy 750 ml vody a 250 ml šťovíku, v druhé nádobě je 800 ml vody a 200 ml šťovíku. Pokud smícháme tekutiny z obou nádob, získáváme tekutinu, která má 800 + 750 = 1550 ml vody a 250 + 200 = 450 ml šťovíku. Tedy po smíchání jsou voda a šťovík v poměru 1550:450 = 31:9.

Úloha 32

Jaký je součet počtu všech možných tahů jezdce pro všechna možná políčka na šachovnici 8 × 8? Poznámka: Jezdec se pohybuje přesune o dvě pole svisle nebo vodorovně a poté ještě o jedno pole kolmo na původní směr – cesta připomíná písmeno L.

Řešení 32

Na vyřešení této úlohy si stačí nakreslit šachovnici 8 × 8 a do každého políčka doplnit, na kolik různých políček se z tohoto políčka dovede dostat jezdec. Po sečtení všech 64 čísel v šachovnici dostaneme výsledek. Vyplněná šachovnice vypadá takto:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Celkový součet čísel na šachovnici je 4 × (1 × 2 + 2 × 3 + 5 × 4 + 4 × 6 + 4 × 8) = 336.

Úloha 33

Indiana Jones stojí v starobylém bludišti, na jehož konci je bájný poklad neskutečné hodnoty. Indy ví, že se nachází v levém vrchním rohu bludiště (označený J) a poklad (označený P) je v pravém spodním rohu. A tak si řekne, že se vždy pohne o jedno políčko dolů, nebo doprava (nahoru a doleva se nebude vracet). Co však neví je to, že v bludišti je past (označená X), na kterou když vstoupí, poklad se propadne do země. Pokud si bude v každém kroku vybírat náhodně, zda jde dále dolů nebo doprava, jaká je šance, že získá poklad? Výsledek uveďte v procentech zaokrouhlený na dvě desetinná místa. Poznámka: Šanci vypočítejte jako počet možných cest bez pasti děleno počet všech možných cest přes bludiště.

J					
			X		
					P

Řešení 33

Začněme tím, že spočítáme, kolik vlastně existuje přes bludiště různých cest. To lze udělat tak, že si do každého políčka napíšeme, kolik vede cest z levého horního rohu do daného políčka a poté jen přečteme číslo z pravého dolního políčka. Ale jak všechna políčka vyplníme? Začneme s jedničkou v levém vrchním rohu, protože v tomto políčku Indy začíná a tím pádem existuje jen jedna možnost, jak se sem mohl dostat. Vzhledem k tomu, že se Indy může v bludišti pohybovat jen dolů a doprava, do políčka A na obrázku se umíme dostat buď z políčka B nebo z políčka C. Tedy počet možností, jak se dostat do políčka A je součet počtu možností, jak se dostat do políčka B a počtu možností, jak se dostat do políčka C.

...	...	...
...	...	C
...	B	A

Políčka v tabulce tedy vyplníme tak, že do políčka vždy napíšeme součet čísel na políčku přímo nad tímto políčkem a vlevo od tohoto políčka. Pokud políčko nemá políčko nad nebo vlevo, tak do políčka jen opíšeme číslo zleva, nebo shora. Vyplněná tabulka bude vypadat takto:

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126

Zbývá spočítat, kolik cest je s pastí. Do políčka s pastí se lze dostat 10 způsoby. Kolik však mají cesty s pastí možných pokračování? Na to stačí nakreslit si podobnou tabulku, kde však nebudeme počítat cesty bez pasti. Bude tedy vypadat takto:

1	1	1	1	0	0
1	2	3	4	0	0
1	3	6	10	10	10
0	0	0	10	20	30
0	0	0	10	30	60

Vidíme, že počet cest s pastí je 60. Šance, že Indy získá poklad, je tedy (126 – 60)/126 = 66/126 = 52,4 %.

Úloha 34

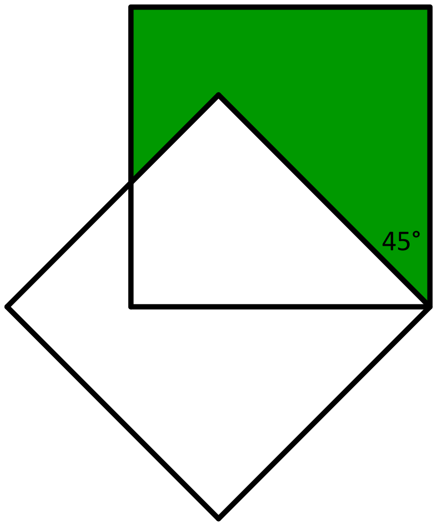
V roce 2009 se na Slovensku konaly prezidentské volby, které vyhrál Ivan Gašparovič nad Ivetou Radičovou. V druhém kole získala Radičová 988808 hlasů, což bylo 44,47 % platných odevzdaných hlasů. Hodně lidí však vůbec nepřišlo k volbám. Kolik nejméně lidí, co nepřišli volit, by muselo přijít a hlasovat za Radičovou, aby vyhrála druhé kolo voleb? Výsledek zaokrouhlete na tisíce nahoru.

Řešení 34

Radičová získala 44,47 % platných odevzdaných hlasů, ve volbách tedy bylo celkově odevzdáno 988808 / 0,4447 = 2223539 platných hlasů. Gašparovič tím pádem musel dostat 2223539 – 988808 = 1234731 hlasů. Aby Radičová vyhrála, musela by získat alespoň o 1234731 – 988808 + 1 = 245924 hlasů více. Pokud toto číslo zaokrouhlíme na tisíce, získáme 246000.

Úloha 35

Máme čtverec, který má stranu o délce 1 m. Okolo jednoho jeho vrcholu otočíme identický čtverec o 45 stupňů, jako na obrázku. Původní čtverec se tedy rozdělí na dvě části – zelenou a bílou. Jaký je obsah té větší části v m^2?



Řešení 35

Dokresleme si do původního obrázku dvě úsečky, které prochází bodem *B* a jsou kolmé na strany čtverce. Označme jejich průsečíky se stranami čtverce *W*, *X*, *Y*, *Z*, jako na obrázku. Ze zadání víme, že $|AB| = 1$ cm. Z Pythagorovy věty platí, že $|AX|^2 + |BX|^2 = |AB|^2 = 1$. Protože úhly *BAX* a *ABX* jsou 45°, musí být trojúhelník *BAX* rovnoramenný, a tedy $|AX| = |BX|$. Tím pádem $2|AX|^2 = 1$, $|AX| = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2$. Protože $|BX| + |BY| = 1$, je $|BY| = 1 - \sqrt{2}/2$. Stejně jako *BAX*, i trojúhelník *BYH* je rovnoramenný, tedy $|HY| = |BY|$. Protože bod B je na uhlopříčce původního čtverce, musí rovněž platit, že $|BY| = |BZ|$.

Tím pádem již víme vše, co potřebujeme na to, abychom vypočítali obsah zeleně vybarvené plochy. Ten se rovná: $(\sqrt{2}/2 \times \sqrt{2}/2)/2 + (1 \times (1 - \sqrt{2}/2)) + ((1 - \sqrt{2}/2) \times (1 - \sqrt{2}/2))/2 = 2 - \sqrt{2}$. Zbývá ověřit, zda je větší plocha zelené části: $2 - \sqrt{2}$, nebo plocha bílé části: $1 - (2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$. Snadno zjistíme, že větší je $2 - \sqrt{2}$.