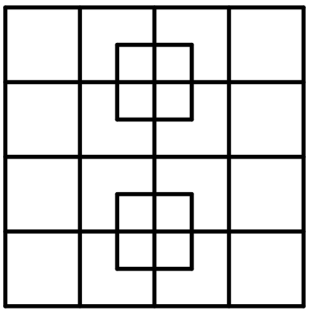
Vzorové riešenia MatX 2019

matx.p-mat.sk

28. marca 2019

Úloha 1
Koľko štvorcov je na obrázku?



Riešenie 1
Aby sme zabránili počítaniu niektorých štvorcov viackrát, spravme si systém a spočítajme vždy počet štvorcov jednej veľkosti. Tieto počty potom sčítame a dostaneme odpoveď.
1×1: $16 + 2 = 18$
2×2: 9
3×3: 4
4×4: 1
Malé 1×1 v strede: 8
Celkovo teda $18 + 9 + 4 + 1 + 8 = 40$ štvorcov.

Úloha 2
V záhrade stoja dva stromy – čerešňa a hruška. Na oboch stromoch sedí niekoľko vtákov. Ak by jeden z vtákov z čerešne preletel na hrušku, na hruške by bolo dvakrát viac vtákov ako na čerešni. Ak by jeden z vtákov z hrušky preletel na čerešňu, na oboch stromoch by bolo rovnako vtákov. Koľko vtákov sedí na hruške?

Riešenie 2
Označme si počty vtákov na stromoch C a H. Dve podmienky zo zadania môžeme zapísať pomocou rovníc:

$$H + 1 = 2 \times (C - 1) \qquad (1)$$
$$H - 1 = C + 1 \qquad (2)$$

Z druhej rovnice vyjadríme, že $H = C + 2$. Keď si tento výsledok dosadíme do prvej rovnice, získame rovnicu $C + 2 + 1 = 2 \times (C - 1)$, z čoho nám vyjde, že $C = 5$, a teda $H = 7$. Na čerešni teda je 5 vtákov a na hruške 7.

Úloha 3

Dvaja spolužiaci hrajú karty o jablká, pričom víťaz partie vždy dostane jedno jablko od porazeného. V hre, ktorú hrajú, nie je možná remíza. Na konci vyučovania jeden z nich už vyhral tri partie, zatiaľčo druhý za ten deň dokopy získal tri jablká. Koľko hier hrali?

Riešenie 3

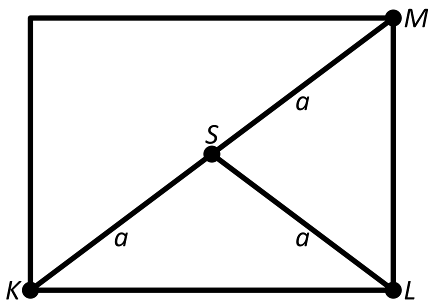
Prvý spolužiak vyhral tri partie, teda musel od druhého spolužiaka dostať tri jablká. Druhý spolužiak však za ten deň získal celkovo tri jablká, teda musel vyhrať šesť partií – tri na to, aby získal naspäť tri jablká a tri na to, aby ešte získal tri jablká naviac. Celkovo teda hrali deväť partií, z ktorých tri vyhral prvý spolužiak a šesť druhý.

Úloha 4

Dievčatá sa hrajú v obdĺžnikovej záhrade. Do troch rohov záhrady sa postavili postupne Karin, Lenka a Monika a do stredu záhrady sa postavila Sára. Najprv Karin a Lenka natiahli medzi sebou modré 8-metrové lano. Potom sa k nim pridala Sára, a tak natiahli medzi sebou do trojuholníka červené 18-metrové lano. Nakoniec chceli zapojiť aj Moniku, a tak natiahli zelené 16-metrové lano do trojuholníka medzi Lenkou, Monikou a Sárou. Aké dlhé lano v metroch by potrebovali, ak by sa Sára postavila do štvrtého rohu záhrady a dievčatá by chceli natiahnuť lano medzi sebou po obvode záhrady?

Riešenie 4

Na obrázku vidíme, ako dievčatá stáli v záhrade. Vieme, že $|KS| = |LS| = |MS|$, pretože každá z nich má dĺžku polovicu uhlopriečky obdĺžnika. Označme si teda ich spoločnú dĺžku ako a. Zo zadania vieme, že $|KL| = 8$ m, $a + a + 8$ m $= 18$ m, $a + a + |ML| = 16$ m. Rovno teda vieme zistiť, že $a = 5$ m. Z toho tiež vyplýva, že $|ML| = 6$ m. Pôvodná otázka sa dá preformulovať na otázku, aký je obvod záhrady. Pretože vieme dĺžku oboch strán obdĺžnika, vieme to spočítať: $(8 + 8 + 6 + 6)$ m $= 28$ m.



Úloha 5

Po skončení stavby dal vedúci robotníkovi rozrezať zvyšné drevené trámy na menšie kusy, vhodné na kúrenie. Robotník sa spýtal, koľko za to dostane zaplatené. Vedúci ho teda nechal rozrezať jeden trám na tri kusy a odmeral mu čas. Keďže vedúci vedel, koľko dostáva robotník na hodinu, povedal mu, že toto by bolo za 80 centov. Koľko euro dostal robotník, ak rozrezal 5 trámov na 3 kusy, 17 trámov na 4 kusy, 8 trámov na 5 kusov a 2 dlhé trámy na 7 kusov?

Riešenie 5

Na tejto úlohe je zákerné to, že musíme počítať plat za rezy, nie za kusy. Keď teda robotník rozrezal prvý trám na skúšku, rozrezal ho na tri kusy, ale spravil len dva rezy. Tým pádom je cena za jeden rez 40 centov.

Teraz už len zostáva spočítať celkový počet rezov, ktoré musel robotník spraviť. Ten sa dá vypočítať ako (počet trámov) × (počet kusov – 1), teda celkovo 5 × 2 + 17 × 3 + 8 × 4 + 2 × 6 = 105 rezov. Za každý dostal 40 centov, teda 0,4 eura. Celkovo teda dostal 105 × 0,4 = 42 eur.

Úloha 6

V nasledujúcom príklade nahraďte každé písmeno cifrou, pričom rovnaké písmená musia byť nahradené rovnakou cifrou a rôzne písmená rôznymi ciframi.

```
A A B B A
- C C B B
---------
A B C B A
```

Aká je hodnota päťciferného čísla ABCBA?

Riešenie 6

Prepíšme si príklad ako súčet:

```
A B C B A
+ C C B B
---------
A A B B A
```

Zo súčtu na mieste jednotiek vidíme, že B musí byť 0, aby platilo, že A + B = A. Akonáhle vieme toto, tak vidíme, že musí platiť C + C = 10, teda C = 5. Potom už ľahko dopočítame, že A = 6. ABCBA je teda 60506.

Úloha 7

Ak je číslo deliteľné deliteľné 17, hovoríme o ňom, že je šťastné. Ak je číslo deliteľné 13, hovoríme o ňom, že je dobré. Koľko prirodzených čísel väčších ako nula a menších ako 20000 je šťastných aj dobrých zároveň?

Riešenie 7

Všimnime si, že obe čísla (13 aj 17) sú prvočísla. Tým pádom budú čísla, ktoré sú šťastné a dobré zároveň len čísla, ktoré sú násobkami súčinu týchto dvoch čísel. Súčin 13 a 17 je 221. Stačí teda spočítať, koľko je násobkov čísla 221 menších ako 20000, teda medzi číslami 1 až 19999. Tých je 19999 / 221 zaokrúhlené nadol, čo je 90.

Úloha 8

Perfektné zamiešanie 10 kariet spravíme takto:

1. Položíme karty na seba na jeden balíček a potom ich rozdelíme na dva balíčky – vrchných 5 kariet a spodných 5 kariet.
2. Tieto dva balíčky spojíme znovu tak, že karty budú na striedačku z balíčku 1, 2, 1, 2, ...

(Teda napríklad 6 kariet očíslovaných 1, 2, 3, 4, 5, 6 a zoradených v tomto poradí, by po perfektnom zamiešaní boli zoradené 1, 4, 2, 5, 3, 6.) Máme zoradený balíček 10 kariet. Koľkokrát ho musíme perfektne zamiešať, aby boli karty opäť v pôvodnom poradí?

Riešenie 8

Zatiaľ čo existuje aj všeobecný vzorec, pri tejto úlohe bolo najjednoduchšie riešenie vypísať si prvých pár zamiešaní a všimnúť si, že po šiestom zamiešaní sa vrátime k pôvodnému zoradeniu:

Pôvodné: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Prvé: 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10
Druhé: 1, 8, 6, 4, 2, 9, 7, 5, 3, 10
Tretie: 1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 10

Štvrté: 1, 5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 10
Piate: 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10
Šieste: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Úloha 9

Janko chce odmerať 6 minút pomocou presýpacích hodín. Má však iba také, ktoré sa presypú za 5 minút a také, čo sa presypú za 4 minúty. Koľko minimálne krát musí nejaké hodiny počas merania otočiť (vrátane prvých otočení hodín)?

Riešenie 9

Na jedno otočenie určite nevieme odmerať šesť minút, pretože vieme odmerať buď 4 alebo 5 minút. Na dve otočenia vieme odmerať 4 minúty, 5 minút, 9 minút (spustíme druhé po skončení prvých), alebo 1 minútu (spustíme oboje naraz a meriame čas od okamihu dosypania 4-minútových). Stále však nevieme odmerať šesť minút. Skúsme teda na tri otočenia. To sa už dá:

- Čas 0: Otočíme oboje hodiny. (2 otočenia)
- Čas 4: 4-minútové sa presypali. Od tejto chvíle začíname merať čas, ale 4-minútové už neotáčame. (0 otočení)
- Čas 5: 5-minútové sa presypali, otočíme ich. (1 otočenie)
- Čas 10: 5-minútové sa presypali. Týmto sme odmerali čas od 4. do 10. minúty, čo je 6 minút. (0 otočení)

Potrebujeme teda hodiny otočiť minimálne trikrát.

Úloha 10

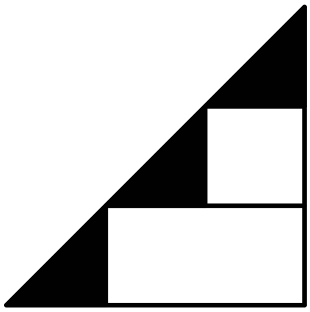
V nasledujúcej rovnici nahraďte každé písmeno cifrou 1 až 9, pričom rovnaké písmená musia byť nahradené rovnakou cifrou a rôzne písmená rôznymi ciframi:
AB – BA = 54
Koľko rôznych možností nahradenia písmen ciframi existuje?

Riešenie 10

Pretože musí vyjsť výsledok 54 a AB aj BA sú nutne dvojciferné čísla (teda najmenej 10), musí byť A určite najmenej 6. Stačí teda vyskúšať 4 možnosti pre A = 6, A = 7, A = 8 a A = 9.
A = 6: V tomto prípade by B muselo byť 0, aby príklad vyšiel. Toto však nevyhovuje zadaniu..
A = 7: V tomto prípade vyhovuje B = 1, pretože 71 — 17 = 54.
A = 8: V tomto prípade vyhovuje B = 2, pretože 82 — 28 = 54.
A = 9: V tomto prípade vyhovuje B = 3, pretože 93 — 39 = 54.
Úloha má teda tri možné rôzne nahradenia písmen ciframi.

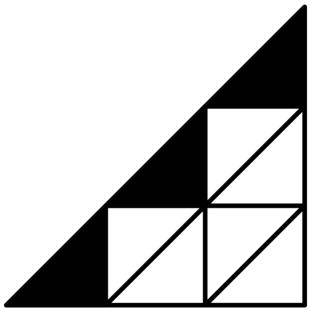
Úloha 11

Na obrázku je rovnoramenný pravouhlý trojuholník, do ktorého sú vpísané dva obdĺžniky tak, že prepona je vrcholmi obdĺžnikov rozdelená presne na tretiny. Aký je pomer čiernej vyfarbenej časti k obsahu celého trojuholníka?



Riešenie 11

Keď si do obrázku dokreslíme štyri úsečky tak, ako na obrázku nižšie, v trojuholníku vznikne 9 zhodných menších trojuholníčkov. Tie sú zhodné preto, že všetky majú pravý uhol a strany, ktoré ho zvierajú, sú rovnakých dĺžok. Keďže na čierno vyfarbená časť pokrýva 3 trojuholníčky a na celej ploche trojuholníka je ich celkom 9, tak pomer čiernej časti k obsahu celého trojuholníka je 3 / 9 = 1 / 3.

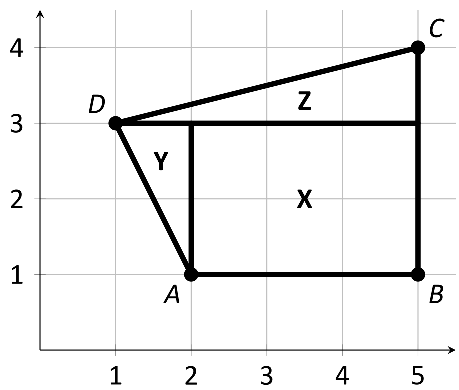


Úloha 12

Lukáš si v súradnicovej sústave zakreslil body A na (2; 1), B na (5; 1), C na (5; 4) a D na (1; 3). Aký je obsah v cm^2 štvoruholníka ABCD, ak je úsečka AB dlhá 3 cm?

Riešenie 12

Nakreslime si zadaný útvar a rozdeľme ho na tri časti tak, ako na obrázku. Časť X má obsah 3 × 2 = 6 cm^2, časť Y má obsah 1 × 2 / 2 = 1 cm^2, časť Z má obsah 4 × 1 / 2 = 2 cm^2. Celkový obsah je teda 6+1+2 = 9 cm^2.



Úloha 13
Koľko dvojíc hrán, ktoré sú navzájom rovnobežné, má kváder?

Riešenie 13
Kváder má celkovo 12 hrán, v čom sú 3 štvorice hrán, ktoré sú spolu navzájom rovnobežné. Medzi štyrmi hranami je však 4 × 3 / 2 = 6 dvojíc hrán, ktoré sú navzájom rovnobežné. Spolu teda existuje 6 + 6 + 6 = 18 dvojíc hrán, ktoré sú spolu navzájom rovnobežné.

Úloha 14
Koľko existuje 6-ciferných palindrómov deliteľných 6 takých, že prvá cifra je o tri väčšia ako druhá cifra a druhá cifra je o tri väčšia ako tretia cifra? Poznámka: Palindróm je číslo, ktoré je pri čítaní spredu rovnaké ako pri čítaní odzadu, teda napríklad 1234321 je palindróm.

Riešenie 14
Kvôli podmienke o prvých troch cifrách máme len štyri možnosti, aké môžu byť prvé tri cifry: 630, 741. 852 alebo 963. Tým pádom dostávame štyri možnosti, ako môžu vyzerať 6-ciferné palindrómy: 630036, 741147, 852258 alebo 963369. V zadaní je však ešte podmienka ohľadom deliteľnosti šiestimi, ktorej vyhovujú len 630036 a 852258, teda celkovo dve čísla.

Úloha 15
Podľa legendy bol rok 234 magický. Podľa tej istej legendy platí, že ak je rok magický, tak je aj rok o ciferný súčet tohto roka magický (teda rok 234 + (2 + 3 + 4) = 243 je magický). Je rok 2019 magický?

Riešenie 15
Táto úloha sa dá riešiť buď vypisovaním čísel až po 2019, alebo oveľa rýchlejšie, ak sa zamyslíme. Poďme sa teda zamyslieť. Pravidlo deliteľnosti deviatimi vraví, že číslo je deliteľné deviatimi vtedy a práve vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. 234 je deliteľné deviatimi, pretože 2 + 3 + 4 = 9. Ďalší magický rok získame tak, že ku 234 pripočítame jeho ciferný súčet. Pretože tento ciferný súčet je deliteľný deviatimi, bude aj ďalší magický rok deliteľný deviatimi. Toto bude platiť stále, pretože vždy získame magický rok deliteľný deviatimi a opäť k nemu pripočítame násobok deviatky, čím znovu získame magický rok deliteľný deviatimi. Pretože 2019 nie je deliteľné deviatimi, nie je to ani magický rok.

Úloha 16
V súradnicovej sústave sú úsečkou spojené body na súradniciach (0; 0) a (36; 84). Koľkými mrežovými bodmi súradnicovej sústavy okrem bodov A a B prechádza úsečka AB?

Riešenie 16
Ak si upravíme zlomok 36 / 84 na základný tvar, dostaneme, že 36 / 84 = 3 / 7. Teraz si nakreslime spojnicu bodov (0; 0) a (3; 7) – vidíme, že prechádza iba mrežovými bodmi (0; 0) a (3; 7), pretože 3 a 7 majú najväčšieho spoločného deliteľa len 1. Pokiaľ však túto spojnicu naskladáme za seba na priamku 12-krát, dostaneme úsečku AB. To preto, že posun 12-krát o (3;7) nás dostane na bod (12 × 3; 12 × 7) = (36; 84). Tým pádom rovno vidíme, že úsečka AB bude prechádzať 13 mrežovými bodmi (vrátane A a B), pretože na každú úsečku pripadá jeden bod + jeden extra na konci. Po odčítaní dvoch koncových bodov A a B dostávame výsledok 11 mrežových bodov.

Úloha 17

Dve triedy, 8. A a 8. B, idú na školský výlet do Tatier a ich triedni učitelia kupujú lístky na vlak z Bratislavy do Popradu. S každou triedou ide na výlet ich triedny učiteľ. Dospelý lístok je drahší, ale nie viacej ako dvakrát drahší ako ten detský. Triedny učiteľ 8. A zaplatí za svoj lístok a lístky pre deti 99 eur. Triedny učiteľ 8. B, kde je o štyroch žiakov viacej ako v 8. A, zaplatí za svoj lístok a lístky pre deti 115 eur. Aký drahý v eurách je lístok pre jedného učiteľa?

Riešenie 17

Označme si cenu detského lístku d, cenu učiteľského lístku u a počet žiakov z. Potom zo zadanie vieme, že:

$$u + z \times d = 99 \qquad (1)$$

$$u + (z + 4) \times d = 115 \qquad (2)$$

Teraz sa zbavme v oboch rovniciach neznámych d a u tak, že od druhej rovnice odpočítame prvú rovnicu:

$$u + (z + 4) \times d - u + z \times d = 115 - 99$$

$$4d = 16$$

Týmto sme zistili, že $d = 4$, teda cena detského lístku je 4 eurá. Zostáva teda určiť cenu učiteľského lístku. Teraz využijeme to, že $u > d$ a zároveň u nie je viac než 2d, teda cena učiteľského lístku je niekde medzi 4 a 8 eurami. Tým pádom v prvej rovnici musel učiteľ zaplatiť za deti niečo medzi 91 a 95 eurami. Cena detského lístku je však 4 eurá, teda celková cena za deti musí byť deliteľná štyrmi. Jediné číslo medzi 91 a 95, ktoré je deliteľné štyrmi, je 92. Z toho už vyplýva, že cena za lístok pre učiteľa bola $99 - 92 = 7$ eur.

Úloha 18

Sestry Jane, Elizabeth, Kitty a Lýdia vo svojom voľnom čase vyšívajú. Na začiatku majú spolu 200 perličiek. Jane dala Elizabeth počas vyšívania 26 svojich perličiek, Elizabeth zase dala Kitty 36 perličiek, Kitty dala Lýdii 32 perličiek a Lýdia dala Jane 4 perličky. Všetky sestry použili všetky perličky, ktoré mali. Keď dovyšívali, s prekvapením zistili, že všetky na svoje diela použili rovnaký počet perličiek. Koľko perličiek mala Jane pred vyšívaním?

Riešenie 18

Vypíšme si matematicky, čo vieme zo zadania:

$J + E + K + L = 200$

$J \to E$: 26, $E \to K$: 36, $K \to L$: 32, $L \to J$: 4.

Keď od pôvodného počtu perličiek, čo mala každá zo sestier, odčítame perličky, ktoré dala, a pripočítame perličky, ktoré dostala, musíme podľa zadania dostať rovnaký počet, teda platí:

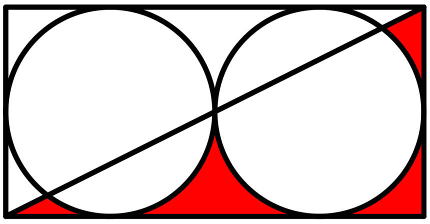
$J - 26 + 4 = E - 36 + 26 = K - 32 + 36 = L - 4 + 32$

$J - 22 = E - 10 = K + 4 = L + 28.$

Pretože vieme, že všetky sestry použili všetky perličky, musí aj na konci platiť, že celkový súčet perličiek je 200, teda musí platiť, že $4 \times (J - 22) = 200$, z čoho vyjadríme, že $J = 72$, teda Jane mala pred vyšívaním 72 perličiek.

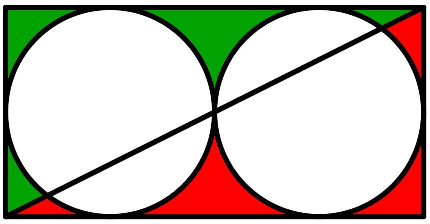
Úloha 19

Aký je obsah červených častí v cm^2?



Riešenie 19

Vyfarbime si v obrázku na zeleno zvyšné časti, ktoré nie sú vyfarbené na červeno a ani neležia v žiadnom z kruhov. Vďaka stredovej súmernosti podľa stredu obdĺžnika sú zelené časti zhodné s červenými a teda majú rovnaký obsah. Obsah červenej časti je teda polovica z (obsah obdĺžnika mínus obsah oboch kruhov) = $(10 \times 20 - \pi \times 5^2 \times 2)/2 = 100 - 25\pi$, čo je približne 21,46 cm^2.



Úloha 20

Blcha sedí na napnutom špagáte a chce sa dostať pomocou 10 skokov o 60 cm doprava. Blcha vie robiť iba 10 cm dlhé skoky, no môže skákať doprava aj doľava. Koľkými rôznymi postupnosťami skokov sa vie blcha dostať o 60 cm doprava?

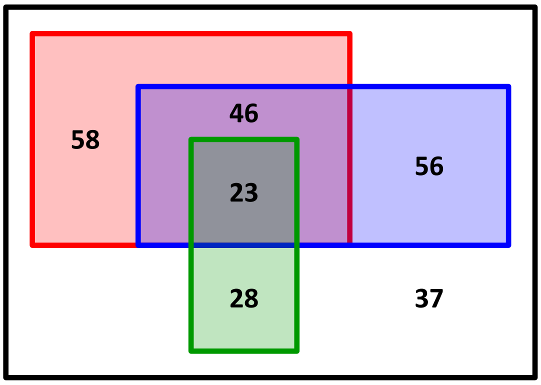
Riešenie 20

Blcha sa potrebuje na 10 skokov dostať o 60 cm doprava, potrebuje teda urobiť dva skoky doľava (o 20 cm) a osem skokov doprava (o 80 cm). Môže to však urobiť v rôznom poradí, napríklad LLPPPPPPPP, alebo LPPPPPPPPL (pri označení L = doľava, P = doprava). Chceme spočítať, koľko existuje rôznych takýchto postupností. Vzhľadom k tomu, že skoky doľava medzi sebou nerozlišujeme, tak nám stačí vypočítať, koľkými spôsobmi vieme vybrať medzi desiatimi skokmi dva skoky doľava. Prvý skok vieme vybrať z 10 rôznych skokov, druhý skok vieme vybrať z 9 rôznych skokov. Celkovo teda $10 \times 9 = 90$ možností. Avšak pozor, v tomto prípade sme započítali dvakrát každú možnosť, pretože sme rozlišovali medzi prvým a druhým skokom. Aby sme dostali správny výsledok, musíme teda tento ešte vydeliť dvomi a celkovo je teda 45 rôznych možností.

Úloha 21

Karol sa prechádzal po jedálni a pýtal sa spolužiakov, ktoré z troch ponúkaných jedál majú radi. Výsledky si potom zaznačil do takéhoto grafu. Na základe grafu rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú nepravdivé. Ako odpoveď zadajte súčet čísel, ktorými sú očíslované nepravdivé tvrdenia:

1) Ak má niekto rád guláš a halušky, tak má rád aj vyprážaný syr.
2) Vyše polovica ľudí má rada halušky.
4) 37 ľudí nemá práve jedno obľúbené jedlo.
8) Viac ako 84 % ľudí má rado aspoň jedno ponúkané jedlo.
16) Vyprážaný syr má rado dvakrát toľko ľudí ako guláš.
32) Keby sa prestali variť halušky, vyše polovice ľudí by si nemalo čo vybrať.
64) Ak má niekto rád halušky aj vyprážaný syr, tak má rád aj guláš.
128) Menej ako polovica ľudí má rada práve jedno jedlo.



Legenda:
Čierna: Všetci
Červená: Majú radi halušky
Modrá: Majú radi vyprážaný syr
Zelená: Majú radi guláš

Riešenie 21

Prejdime si výroky jeden po druhom a určme, ktoré sú pravdivé a ktoré nie. Potom nám už len stačí sčítať čísla nepravdivých:

1) Pravdivý. Neexistujú ľudia, ktorí majú radi len guláš a halušky, ale nie vyprážaný syr.
2) Pravdivý. Konkrétne (58 + 46 + 23) / (58 + 46 + 23 + 56 + 28 + 37) = 51 % má rado halušky.
4) Nepravdivý. Všetci, čo majú radi kombináciu aspoň dvoch jedál spadajú tiež do tejto kategórie, správny počet ľudí by teda bol 37 + 23 + 46.
8) Pravdivý. Konkrétne (58 + 46 + 23 + 56 + 28) / (58 + 46 + 23 + 56 + 28 + 37) = 85 % ľudí má rado aspoň jedno ponúkané jedlo.
16) Nepravdivý. 46 + 23 + 56 = 125 majú radi vyprážaný syr, 23 + 28 = 51 majú radi guláš. 51 × 2 = 102, čo nie je rovné 125.
32) Nepravdivý. Keby prestali variť halušky, tak by si nemali čo vybrať len tí, ktorí majú radi len halušky. Tých je len 58, čo je len 23 %.
64) Nepravdivý. Existuje 46 ľudí, ktorí majú radi oboje, ale nie guláš.
128) Nepravdivý. (58 + 56 + 28) / (58 + 46 + 23 + 56 + 28 + 37) = 57 %.

Celkový súčet nepravdivých výrokov je 4 + 16 + 32 + 64 + 128 = 244.

Úloha 22

Nájdite najväčšie číslo také, že každé dve jeho po sebe idúce cifry tvoria dvojcifernú druhú mocninu prirodzeného čísla. Poznámka: Druhá mocnina je číslo, ktoré sa dá zapísať ako súčin dvoch rovnakých prirodzených čísel.

Riešenie 22

Tu sú všetky dvojciferné druhé mocniny prirodzených čísel: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Z týchto čísel teda potrebujeme zostaviť čo najväčšie číslo. Vyskúšajme, aké veľké číslo dostaneme, ak hľadané číslo bude začínať porade jednotlivými mocninami: 1649, 25, 3649, 49, 649, 81649. Všetky čísla končia päťkou alebo deviatkou, pretože neexistuje dvojciferná druhá mocnina začínajúca päťkou alebo deviatkou. Najväčšie z nich je 81649.

Úloha 23

Starý muž zomrel a zanechal po sebe 10 000 €, ktoré sa mali rozdeliť medzi šesť dedičov – jeho troch synov s manželkami. V závetu nadelil každému z dedičov čiastku podľa zásluh a to nasledovne:
Manželky dostali dohromady 3 960 €, pričom Ivana dostala o 100 € viac ako Aneta a Daniela dostala o 100 € viac ako Ivana. Peter dostal dvakrát viac ako jeho manželka, Erik dostal rovnakú sumu ako jeho manželka a Marián dostal o polovicu viac ako jeho manželka.
Kto je manžel Anety?

Riešenie 23

Označme si množstvo peňazí, ktoré každý dostal, začiatočným písmenom ich mena. Zo zadania vieme, že A + I + D = 3960 a zároveň I = A + 100. Do tretej rovnice môžeme dosadiť z druhej a dostaneme, že D = A + 200. Pokiaľ toto a druhú rovnicu dosadíme do prvej rovnice, dostaneme A + A + 100 + A + 200 = 3A + 300 = 3960. Z toho vyplýva, že A = 1220, I = 1320 a D = 1420.

Teraz existuje 6 možností, kto je s kým zobratý:
1. A + P, I + E, D + M
2. A + P, I + M, D + E
3. A + E, I + M, D + P
4. A + E, I + P, D + M
5. A + M, I + P, D + E
6. A + M, I + E, D + P

Pre každú možnosť podľa informácii zo zadania vypočítame, koľko zdedia manželia. Avšak iba v jednom prípade, konkrétne v 3. A + E = 2440, I + M = 3300, D + P = 4200 vyjde súčet všetkých dedičstiev rovný 1000 eur. Aneta má teda za manžela Erika.

Úloha 24

Máme dva rovnaké poháre, ten vľavo je naplnený mliekom a ten vpravo čajom. Prelejeme lyžicu čaju z pravého pohára do ľavého a poriadne premiešame. Teraz je v pohári vľavo zmes veľa mlieka s málo čajom. Z tejto zmesi prenesieme lyžicu tekutiny do pravého pohára. Oba poháre sú tak rovnako naplnené. Je viac čaju v mlieku v pohári vľavo alebo mlieka v čaji v pohári vpravo?

A) Vľavo
B) Vpravo
C) V obidvoch rovnako
D) Nedá sa určiť

Riešenie 24

Majme na začiatku *x* litrov mlieka vľavo, *x* litrov čaju vpravo a lyžičku o veľkosti *s* litrov. Teraz si nakreslime tabuľku, kde popíšeme stavy po jednotlivých krokoch:

Mlieko	Čaj	Mlieko	Čaj
x	0	0	x
x	s	0	$x - s$
$x - \frac{x}{x+s}s$	$s - \frac{s}{x+s}s$	$\frac{x}{x+s}s$	$x - s + \frac{s}{x+s}s$

Keď upravíme výrazy v spodnom riadku, dostaneme:

Mlieko	Čaj	Mlieko	Čaj
$\frac{x^2}{x+s}$	$\frac{s^2}{x+s}$	$\frac{s^2}{x+s}$	$\frac{x^2}{x+s}$

Teda správna odpoveď je C) teda že pomery čaj k mlieku v ľavom pohári a mlieko k čaju v pravom pohári budú rovnaké.

Úloha 25

Fedor má kocku. Tá je ale škaredá, a tak zväčšil jeden jej rozmer o 1 cm a iný zmenšil o 1 cm. Tretí rozmer nechal nezmenený. Objem kocky sa tak zmenšil o 6 cm^3. Aký bol objem pôvodnej kocky v cm^3?

Riešenie 25

Označme si dĺžku hrany pôvodnej kocky ako a. Potom zo zadania platí:

$$\begin{aligned}(a+1)\times(a-1)\times a+6 &= a\times a\times a\\ (a\times a-1)\times a+6 &= a\times a\times a\\ a\times a\times a-a+6 &= a\times a\times a\\ a &= 6.\end{aligned}$$

Dĺžka hrany pôvodnej kocky bola 6 cm, teda jej obsah bol $6 \times 6 \times 6 = 216$ cm^3.

Úloha 26

Jarka dostala na narodeniny špeciálnu kalkulačku. Má totiž len jedno tlačidlo, ktoré spraví s číslom na displeji vždy to isté. Vždy vynásobí číslo na displeji samým sebou, odčíta isté číslo $č$ a vzniknutým číslom prepíše číslo na displeji. Jarka stlačila tlačidlo v okamihu, keď na displeji svietilo jej obľúbené číslo. Dostala tak na displeji číslo 44. Keby stlačila tlačidlo v momente, kedy by na displeji bolo číslo o 1 väčšie ako jej obľúbené číslo, dostala by na displeji číslo 63. Aká je hodnota čísla č?

Riešenie 26

Označme si Jarkine obľúbené číslo ako j. Potom zo zadania platí:

$$44 = j \times j - c \times c \tag{1}$$

$$63 = (j+1)\times(j+1) - c\times c = j\times j + 2\times j + 1 - c\times c \tag{2}$$

Keď odčítame prvú rovnicu od druhej, dostávame:

$$63 - 44 = 2 \times j + 1$$
$$19 = 2 \times j + 1$$
$$j = 9$$

Akonáhle vieme Jarkine obľúbené číslo, ľahko už dopočítame hodnotu $č = 37$.

Úloha 27

Keď Tibor cestoval do Poľska, pozoroval autá idúce v protismere. Prekvapilo ho, že autá išli vždy rovnakou nemeniacou sa rýchlosťou ako on a v rovnakých rozostupoch – čo minútu stretol jedno auto. Po chvíli jazdy zistil, že to bolo spôsobené tým, že na hraničnom priechode púšťali autá tak, že odchádzali v rovnakých časových rozostupoch. Aký bol časový rozdiel v minútach medzi okamihmi vypustenia dvoch po sebe nasledujúcich áut, ktoré Tibor stretol?

Riešenie 27

Autá, ktoré Tibor stretáva v protismere, majú medzi sebou rovnaký rozostup dĺžky d. V okamihu, keď Tibor stretne auto, tak on a ďalšie auto, ktoré za chvíľu stretne, musia spoločne prejsť vzdialenosť d. Tým, že idú obaja rovnakou rýchlosťou proti sebe platí, že Tibor aj auto v protismere prejdú obaja vzdialenosť $d/2$.

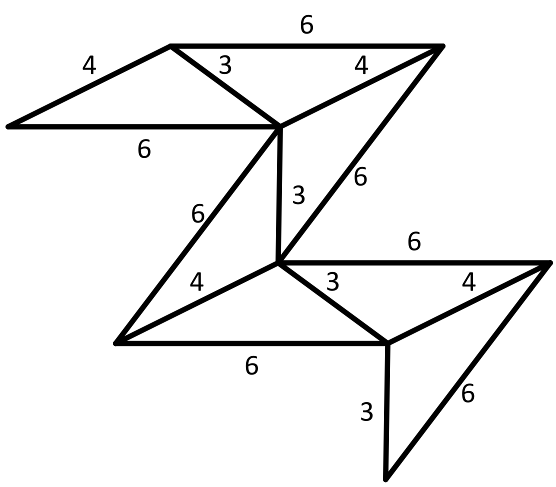
Teraz si predstavme, že by sa Tibor zastavil v okamihu, keď stretol auto v protismere. Teraz potrebuje nasledujúce auto v protismeru prejsť dvojnásobnú vzdialenosť, pretože mu Tibor nejde oproti. Tým pádom mu to bude trvať 2 minúty namiesto jednej, než príde k Tiborovi. Z toho vyplýva, že rozostup medzi autami je 2 minúty.

Úloha 28

Jonáš má stavebnicu, v ktorej je sedem drevených trojuholníkov, každý s dĺžkami strán 3, 4 a 6 cm. Jonáš ich začal ukladať na stôl a to tak, že vždy priložil nový trojuholník celou stranou k jednému z trojuholníkov, čo už boli na stole. Takto by ich chcel položiť na stôl dotýkajúce sa tak, aby vznikol 9uholník s čo najväčším obvodom. Aký najväčší obvod v cm mohol mať tento 9-uholník?

Riešenie 28

Aby sme dosiahli čo najväčší obvod, potrebujeme nechať na obvode čo najviac strán trojuholníkov s dĺžkou 6 cm. Prikladáme teda trojuholníky k sebe len stranami s dĺžkami 3 a 4 cm, čím vznikne reťaz trojuholníkov ako na obrázku. Jej celkový obvod je $7 \times 9 + 3 + 4 = 49$ cm.



Úloha 29

Rodičia majú sedem detí a ich veky sú 1, 3, 5, 7, 9, 11 a 13. Súčet ich vekov je 49, čo je druhá mocnina (teda číslo, ktoré sa dá zapísať ako súčin dvoch rovnakých prirodzených čísel). O koľko rokov bude znova súčet vekov týchto siedmich detí druhá mocnina nejakého prirodzeného čísla?

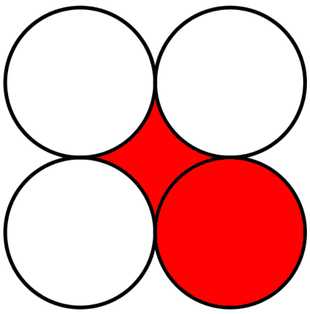
Riešenie 29

Tým, že je detí sedem, stúpne každý rok súčet ich vekov o sedem. Tým pádom za x rokov bude súčet ich vekov rovný $49 + 7x$, čo sa dá upraviť na $7 \times (7 + x)$. Chceme, aby toto číslo bola čo najmenšia druhá mocnina prirodzeného čísla. Druhá mocnina sa okrem iného pozná tak, že v jej rozklade na prvočinitele sa vyskytuje každý prvočiniteľ párny počet krát. Potrebujeme teda, aby sa v súčine $7 \times (7 + x)$ každý prvočiniteľ nachádzal párny počet krát.

Výraz $7 + x$ musí byť deliteľný siedmimi, aby sa v súčine prvočiniteľov vyskytovala sedmička dvakrát. Najmenší taký možný výraz je pre $x = 7$, avšak vtedy dostávame rozklad na prvočinitele $7 \times (7 + 7) = 7 \times 14 = 7 \times 7 \times 2$, kde je len jedna dvojka. Druhý najmenší znovu nevyhovuje, pretože pre $x = 14$ dostávame rozklad $7 \times 7 \times 3$. Avšak pre tretie najmenšie $x = 21$ už dostávame rozklad $7 \times 7 \times 2 \times 2 = 196$, čo je druhá mocnina, pretože $14 \times 14 = 196$. Odpoveď je teda za 21 rokov.

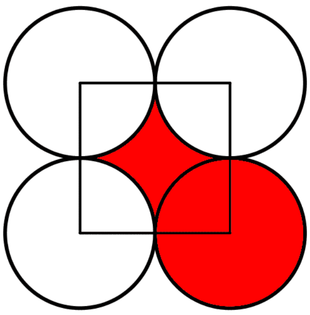
Úloha 30

Dorota má doma šporák so štyrmi platňami, každá s priemerom 10 cm. Raz si chcela na obed uvariť mrkvovú polievku, ale pretože na ňu nedala pozor, časť polievky jej vytiekla a obliala časť šporáku, ktorá je na obrázku vyfarbená na červeno. Aký je obsah obliatej časti v cm^2?



Riešenie 30

Pokiaľ si dokreslíme do obrázku štvorec, ktorý spája stredy všetkých kruhov, vidíme, že poliata časť medzi platňami má obsah (plocha štvorca) – (štyri krát plocha štvrťkruhu). Teda celková poliata plocha je $5 \times 5 \times \pi + 10 \times 10 - 4 \times 5 \times 5 \times \pi/4 = 25 \times \pi + 100 - 25 \times \pi = 100\ cm^2$.



Úloha 31

Dorota zase kuchtí v kuchyni. Tentokrát si zobrala dve litrové nádoby a do každej z nich pripravila šťaveľovú šťavu. V prvej nádobe je zmiešaná voda a šťaveľ v pomere 3:1. V druhej nádobe je voda a šťaveľ zmiešaná v pomere 4:1. Dorota ochutná šťavy z oboch nádob, ale ani jedna šťava sa jej nezdá správne namiešaná. Vezme preto veľký hrniec, do ktorého vyleje obsahy oboch nádob. V akom pomere sú potom v tomto hrnci voda a šťaveľ?

Riešenie 31

V prvej nádobe je voda ku šťaveľu v pomere 3:1, v druhej nádobe 4:1. Pretože obe nádoby sú litrové, tak v prvej nádobe je teda 750 ml vody a 250 ml šťaveľu, v druhej nádobe je 800 ml vody a 200 ml šťaveľu. Keď zmiešame tekutiny z oboch nádob, tak získavame tekutinu, ktorá má 750 + 800 = 1550 ml vody, a 250 + 200 = 450 ml šťaveľu. Teda po zmiešaní sú voda a šťaveľ v pomere 1550:450 = 31:9.

Úloha 32

Aký je súčet počtov všetkých možných ťahov jazdca pre všetky možné políčka na šachovnici 8 × 8? Poznámka: Jazdec sa pohybuje presunom o dve políčka zvisle alebo vodorovne a potom ešte o jedno políčko kolmo na pôvodný smer – cesta pripomína písmeno L.

Riešenie 32

Na vyriešenie tejto úlohy si stačí nakresliť šachovnicu 8 × 8 a do každého políčka doplniť, na koľko rôznych políčok sa z tohto políčka dokáže dostať jazdec. Po sčítaní všetkých 64 čísel dostaneme výsledok. Vyplnená šachovnica vyzerá takto:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Celkový súčet čísel na šachovnici je 4 × (1 × 2 + 2 × 3 + 5 × 4 + 4 × 6 + 4 × 8) = 336.

Úloha 33

Indiana Jones stojí v starobylom bludisku, na konci ktorého je bájny poklad neskutočnej historickej hodnoty. Indy vie, že sa nachádza v ľavom hornom rohu bludiska (označený J) a poklad (označený P) je v pravom dolnom rohu. A tak si povie, že sa vždy pohne o jedno políčko dole, alebo doprava (hore a doľava sa nebude vracať). Čo však ale nevie, že v bludisku je pasca (označená X), na ktorú keď stúpi, poklad sa prepadne do zeme.

Ak si bude v každom kroku vyberať náhodne, či ide ďalej dole alebo doprava, aká je šanca, že získa poklad? Výsledok uveďte v percentách zaokrúhlený na dve desatinné miesta. Poznámka: Šancu vyrátajte ako počet možných ciest bez pasce deleno počet všetkých možných ciest cez bludisko.

J					
			X		
					P

Riešenie 33

Začnime tým, že spočítame, koľko vlastne existuje rôznych ciest cez bludisko. To sa dá urobiť tak, že si do každého políčka napíšeme, koľko vedie ciest z ľavého horného rohu do daného políčka a potom len prečítame číslo z pravého dolného políčka. Ale ako všetky políčka vyplníme? Začnime s jednotkou v ľavom hornom rohu, pretože v tomto políčku Indy začína a tým pádom existuje len jedna možnosť, ako sa sem mohol dostať. Vzhľadom k tomu, že sa Indy môže v bludisku pohybovať len dole a doprava, do políčka A na obrázku sa vieme dostať buď z políčka B, alebo z políčka C. Teda počet možností, ako sa dostať do políčka A je súčet počtu možností, ako sa dostať do políčka B a počtu možností, ako sa dostať do políčka C.

...	...	...
...	...	C
...	B	A

Políčka v tabuľke teda vyplníme tak, že do políčka vždy napíšeme súčet čísel na políčku priamo nad týmto políčkom a vľavo od tohto políčka. Pokiaľ políčko nemá políčko nad alebo vľavo, tak do políčka len opíšeme číslo zľava alebo zhora. Vyplnená tabuľka bude vyzerať takto:

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126

Zostáva spočítať, koľko ciest je s pascou. Do políčka s pascou sa dá dostať 10 spôsobmi. Koľko však majú cesty s pascou možných pokračovaní? Na to stačí nakresliť si podobnú tabuľku, kde však nebudeme počítať cesty bez pasce. Bude teda vyzerať takto:

1	1	1	1	0	0
1	2	3	4	0	0
1	3	6	10	10	10
0	0	0	10	20	30
0	0	0	10	30	60

Vidíme, že počet ciest s pascou je 60. Šanca, že Indy získa poklad, je teda (126 – 60)/126 = 66/126 = 52,4 %.

Úloha 34

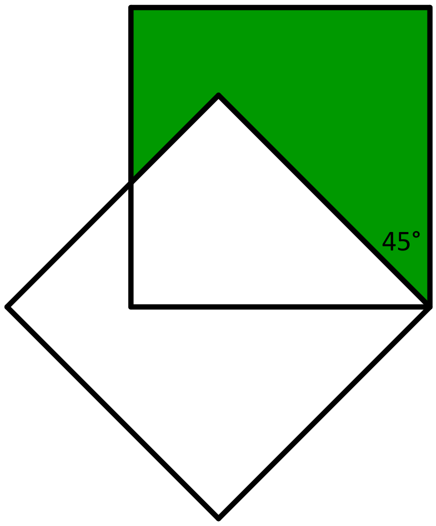
V roku 2009 sa na Slovensku konali prezidentské voľby, ktoré vyhral Ivan Gašparovič pred Ivetou Radičovou. V druhom kole získala Radičová 988808 hlasov, čo bolo 44,47% platných odovzdaných hlasov. Veľa ľudí však vôbec neprišlo voliť. Najmenej koľko z ľudí, čo neprišli voliť, by muselo prísť a hlasovať za Radičovú, aby vyhrala druhé kolo volieb? Výsledok zaokrúhlite na tisícky nahor.

Riešenie 34

Radičová získala 44,47 % platných odovzdaných hlasov, vo voľbách teda bolo celkovo odovzdaných 988808 / 0,4447 = 2223539 platných hlasov. Gašparovič tým pádom musel dostať 2223539 – 988808 = 1234731 hlasov. Aby Radičová vyhrala, musela by získať aspoň o 1234731 – 988808 + 1 = 245924 hlasov viac. Keď toto číslo zaokrúhlime na tisícky, získame 246000.

Úloha 35

Máme štvorec, ktorý má stranu o dĺžke 1 m. Okolo jedného jeho vrcholu otočíme identický štvorec o 45 stupňov, ako na obrázku. Pôvodný štvorec sa teda rozdelí na dve časti – zelenú a bielu. Aký je obsah tej väčšej časti v m^2?



Riešenie 35

Dokreslime si do pôvodného obrázku dve úsečky, ktoré prechádzajú bodom *B* a sú kolmé na stranu štvorca. Označme si ich priesečníky so stranami štvorca *W*, *X*, *Y*, *Z*, ako na obrázku. Zo zadania vieme, že $|AB| = 1$ cm. Z Pytagorovej vety platí, že $|AX|^2 + |BX|^2 = |AB|^2 = 1$. Pretože uhly *BAX* a *ABX* sú 45°, musí byť trojuholník *BAX* rovnoramenný, a teda $|AX| = |BX|$. Tým pádom $2|AX|^2 = 1$, $|AX| = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2$. Pretože $|BX| + |BY| = 1$, je $|BY| = 1 - \sqrt{2}/2$. Rovnako ako *BAX*, aj trojuholník *BYH* je rovnoramenný, teda $|HY| = |BY|$. Pretože bod *B* je na uhlopriečke pôvodného štvorca, musí tiež platiť, že $|BY| = |BZ|$.

Tým pádom už vieme všetko, čo potrebujeme na to, aby sme vypočítali obsah na zeleno vyfarbenej plochy. Ten sa rovná: $(\sqrt{2}/2 \times \sqrt{2}/2)/2 + (1 \times (1 - \sqrt{2}/2)) + ((1 - \sqrt{2}/2) \times (1 - \sqrt{2}/2))/2 = 2 - \sqrt{2}$. Zostáva overiť, či je väčšia plocha zelenej časti: $2 - \sqrt{2}$, alebo plocha bielej časti: $1 - (2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$. Ľahko zistíme, že väčšia je zelená: $2 - \sqrt{2}$.