attomat

9.12.2021

Vzorové riešenia

Kategórie 7, 8, 9, Sekunda, Tercia, Kvarta, Open

p-mat

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

EURÓPSKA ÚNIA

Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

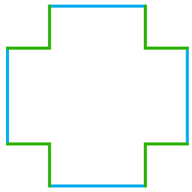
OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

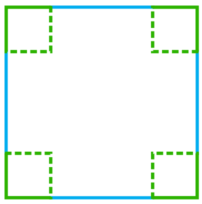
Úloha 01. Matematická torta

Ninka ako správna matematikárka dostala tortu tvaru štvorca so stranou dĺžky 30 cm. Ako sa na ňu pozerala, dostala hlad, a tak z každého rohu odjedla štvorček so stranou dlhou 3 cm. Aký bol potom obvod zvyšku Ninkinej torty v centimetroch?

Výsledok: 120
Riešenie: Po odjedení torta malá tvar ako na obrázku:



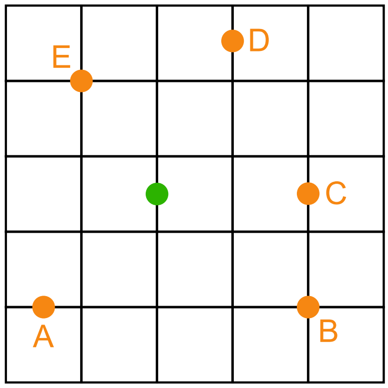
Tento útvar vieme doplniť na pôvodný štvorec bez toho, aby sme zmenili obvod útvaru:



No a už iba vypočítame obvod pôvodného štvorca, ktorý je $4 \cdot 30$cm = 120 cm. Obvod zvyšku Nininej torty je 120 cm.

Úloha 02. Veľký hlad

Sima sa odsťahovala do New Yorku, v ktorom ulice tvoria pravouhlú sieť. Býva na mieste na obrázku označenom zeleným krúžkom a do mapy si vyznačila oranžovým krúžkom reštaurácie v jej blízkosti. Chcela by ísť do najbližšej z nich. Do ktorej reštaurácie má ísť, ak sa v New Yorku dá chodiť iba po chodníkoch?



Výsledok: E
Riešenie: Reštaurácia A je od Simy vzdialená 3 strany štvorčeka, reštaurácia B 3,5 strany štvorčeka, reštaurácie C a D 3 strany štvorčeka a reštaurácia E 2,5 strany štvorčeka. Jasne vidno, že reštauráciu E má najbližšie.

Úloha 03. Aďove pekné čísla

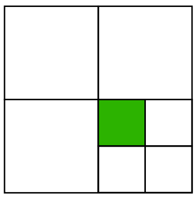
Aďo má netradičné požiadavky na to, ako vyzerajú pekné čísla. Pekné čísla podľa neho spĺňajú tieto pravidlá:
1. pravidlo: Je štvorciferné.
2. pravidlo: Cifra na mieste tisícok je rovnaká ako cifra na mieste desiatok.
3. pravidlo: Súčet všetkých cifier je 17.
4. pravidlo: Len jedna z cifier tohto čísla je nepárna.
Ktoré z týchto čísel je podľa Aďa pekné?

a) 2823 *b) 3284* *c) 4247* *d) 5552*

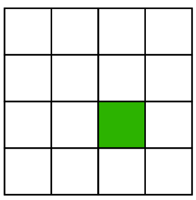
Výsledok: c)
Riešenie: Pozrime sa na jednotlivé pravidlá:
1. pravidlo spĺňajú všetky 4 čísla, lebo všetky sú štvorciferné.
2. pravidlo nespĺňa číslo 3284, lebo na mieste tisícok má cifru 3 a na mieste desiatok cifru 8, ktoré nie sú rovnaké.
3. pravidlo nespĺňa číslo 2823, lebo jeho ciferný súčet je 2 + 8 + 2 + 3 = 15 a nie 17.
4. pravidlo nespĺňa číslo 5552, lebo má viac ako jednu cifru nepárnu, a to tri päťky.
Zostala nám možnosť c) s číslom 4247, ktoré spĺňa všetky pravidlá, čiže je to z uvedených jediné pekné číslo podľa Aďa.

Úloha 04. Štvorce, štvorce everywhere

Laura si kreslí. Nakreslila si štvorec, ktorý rozdelila na 4 rovnaké štvorce. Jeden z nich potom rozdelila na 4 ešte menšie štvorce. Jeden z nich sa rozhodla zafarbiť nazeleno, pričom minula 5 gramov farby. Tak sa jej to zapáčilo, že zafarbila celý veľký štvorec. Koľko gramov farby na to celkovo minula (vrátane 5 gramov na zafarbenie najmenšieho štvorca)?



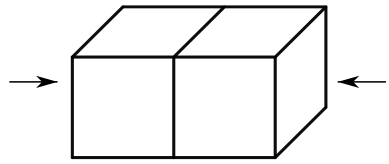
Výsledok: 80
Riešenie: Všimnime si, že celý veľký štvorec vieme rozdeliť na 16 takých s rozmermi ako nazeleno zafarbený najmenší štvorec:



Na zafarbenie každého minie Laura 5 gramov farby, takže na zafarbenie celého veľkého štvorca minie $16 \cdot 5 = 80$ gramov farby.

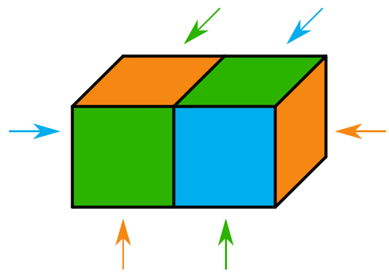
Úloha 05. Polepená kocka

Lucka si zobrala 2 rovnaké kocky a zlepila ich dokopy ako na obrázku. Teraz by chcela zafarbiť steny pôvodných kociek 3 farbami - zelenou, modrou a oranžovou. Chce to spraviť tak, aby steny rovnakej farby nemali spoločnú úsečku. Lucka sa pred farbením zamyslela: "Steny oproti zlepeným stenám (na obrázku naznačené šípkami) budú mať rovnakú farbu." Mala Lucka pravdu?



Výsledok: nie

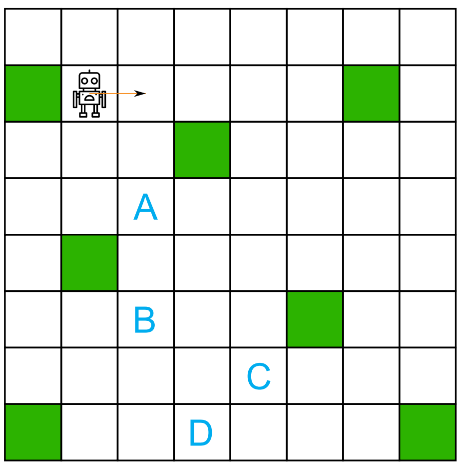
Riešenie: Zafarbime kocku tak ako na obrázku (všetky šípky okrem úplne pravej naznačujú farbu steny, ktorú nevidno):



Takéto ofarbenie stien spĺňa Luckine požiadavky, no ukazuje, že Luckino zamyslenie bolo nesprávne. Lucka teda pravdu nemala.

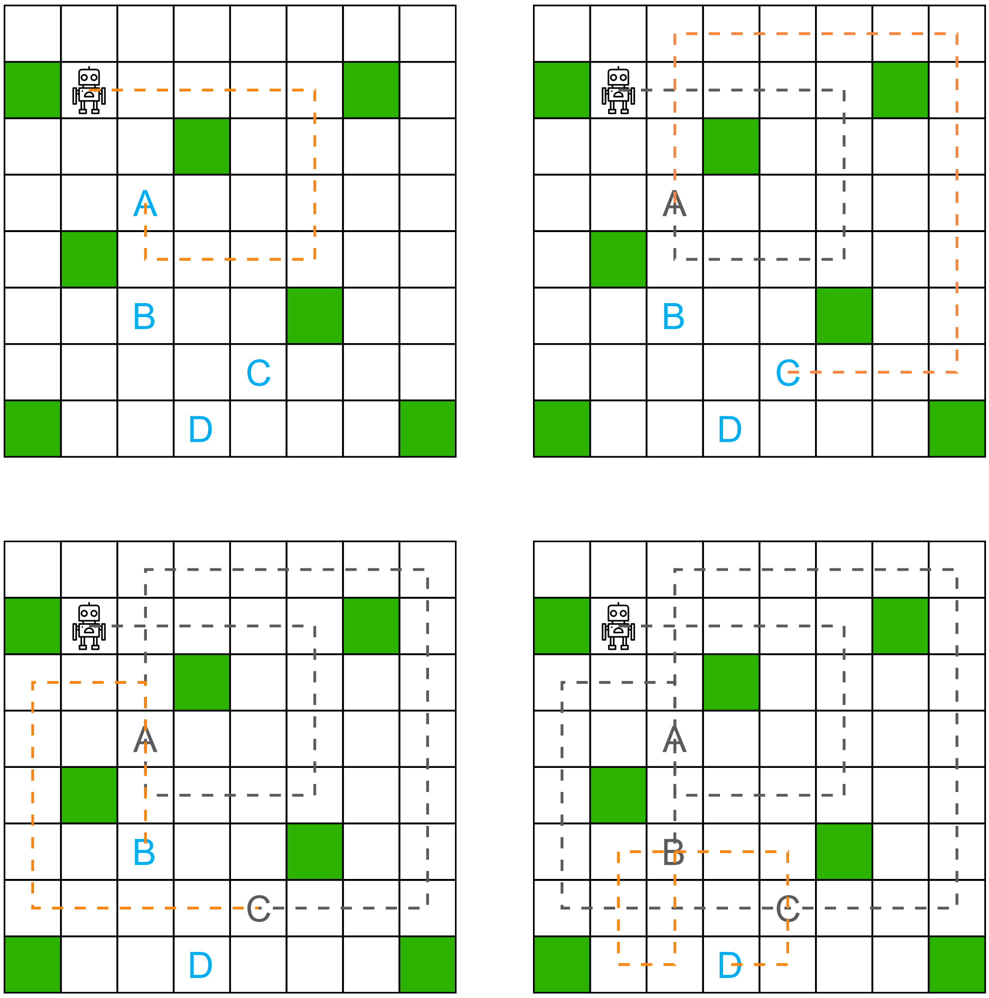
Úloha 06. Robota pre robota

Matej vytiahol z krabice robota a plán s prekážkami (zelené políčka) ako na obrázku. Robota umiestnil na plán a otočil ho smerom doprava. Robot sa pohybuje podľa nasledovných pravidiel:
1.) Keď má pred sebou prázdne políčko, tak sa naň pohne.
2.) Keď má pred sebou políčko obsadené prekážkou alebo kraj plánu, otočí sa doprava.
Zoraď políčka označené písmenami podľa toho, v akom poradí nimi robot prvýkrát prejde. Začnite prvým prejdeným.



Výsledok: A, C, B, D

Riešenie: Nakreslime si pohyb robota a zapisujme si, v akom poradí navštívil jednotlivé políčka:



Vidíme, že robot prešiel políčkami v poradí A, C, B a D.

Úloha 07. Štedrá Miška

Včera mala Miška narodeninovú oslavu, na ktorú prišli jej kamarátky. Miška má aspoň 2 kamarátky. K narodeninám dostala Miška 50 cukríkov, s ktorými sa podelila s kamarátkami. Jeden z nich si nechala a zvyšné rozdelila svojim kamarátkam tak, aby každá dostala viac ako 1 cukrík a aby každá kamarátka dostala rovnako veľa cukríkov. Koľko kamarátok má Miška?

Výsledok: 7

Riešenie: Jeden cukrík si Miška nechala, takže rozdávala 50 - 1 = 49 cukríkov. Tie mohla rozdeliť iba tromi spôsobmi tak, aby každá kamarátka dostala rovnako veľa cukríkov:
- 1 kamarátke dať 49 cukríkov
- 7 kamarátkam dať 7 cukríkov
- 49 kamarátkam dať po 1 cukríku

Prvá možnosť však odporuje zadaniu, ktoré vraví, že Miška má viac ako jednu kamarátku. Posledná možnosť tiež nenastáva, lebo podľa zadania dostala každá kamarátka viac ako 1 cukrík. Musela tak nastať druhá možnosť, a teda Miška má 7 kamarátok.

Úloha 08. Stratení kamaráti

Vilo hľadá v škole svojich 4 kamarátov, ale nevie, do ktorých tried chodia. V škole je 10 tried a žiadni dvaja z jeho kamarátov nechodia do tej istej triedy. Koľko tried musí Vilo navštíviť, aby mal istotu, že určite nájde aspoň dvoch zo svojich kamarátov, ktorých hľadal?

Výsledok: 8
Riešenie: Vilovi kamaráti sú v štyroch z desiatich tried na škole. Poďme sa pozrieť na najhorší prípad, ktorý môže nastať. Ak by mal veľké nešťastie, tak by navštívil najprv všetky triedy, v ktorých kamaráta nemá. Tých je šesť. Potom by musel navštíviť ešte dve triedy zo zvyšných, aby našiel dvoch kamarátov. Z toho vyplýva, že Vilo musí navštíviť aspoň osem tried, aby si bol určite istý, že našiel aspoň dvoch svojich kamarátov.

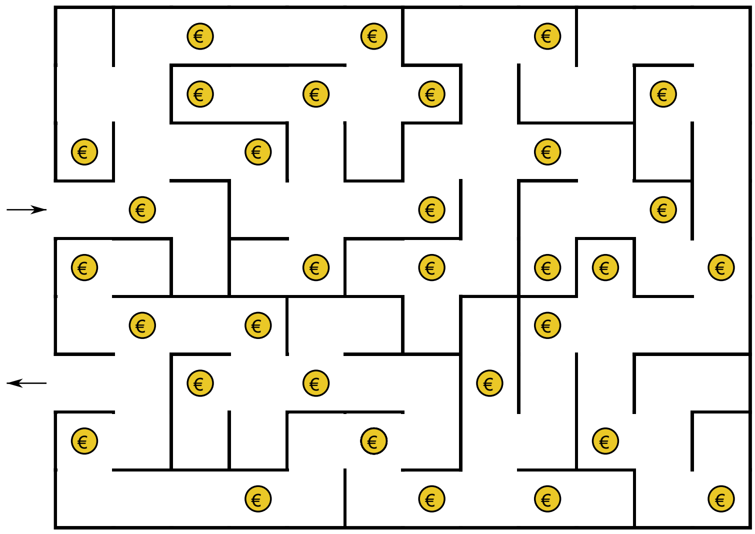
Úloha 09. Kopa mrkiev

Zajačiu rodinku v Attomatove tvoria tri dospelé zajace a dve mláďatá. Dospelý zajac zje 16 mrkiev za deň a mláďa 6 mrkiev za deň. Priemerne koľko mrkiev zje jeden zajac (nehľadiac na jeho vek) z tejto rodinky za deň?

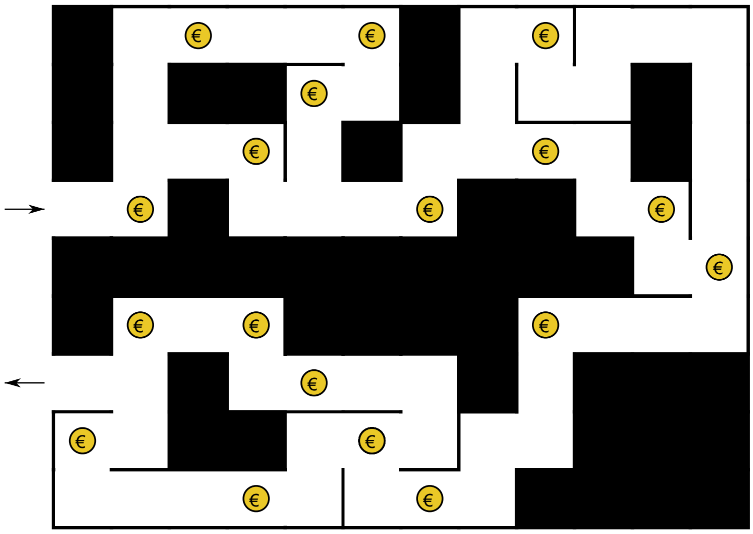
Výsledok: 12
Riešenie: Tri dospelé zajace zjedia spolu za deň $16 \cdot 3 = 48$ mrkiev. Mláďatá zjedia spolu $6 \cdot 2 = 12$ mrkiev za deň. Päťčlenná rodinka teda zje 60 mrkiev za deň. Jeden člen tejto rodinky potom zje priemerne $60 : 5 = 12$ mrkiev za deň.

Úloha 10. Indiana Jones platí mýto

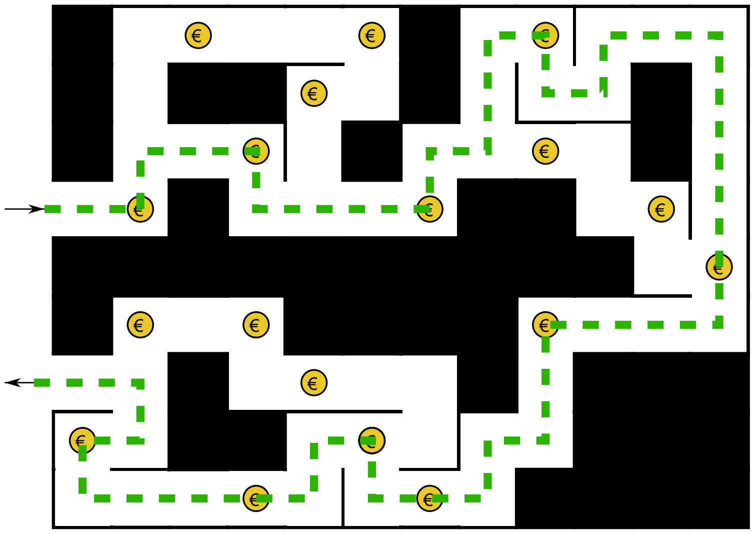
Indiana Jones musí prejsť bludiskom na obrázku. Bludisko je ale špeciálne - na prechod niektorými miestami (označených krúžkom so symbolom €) musí zaplatiť 1 €. Indiana Jones by chcel prejsť bludiskom a pritom zaplatiť čo najmenej peňazí. Koľko najmenej eur zaplatí počas cesty bludiskom?



Výsledok: 10
Riešenie: Zbavme sa najprv všetkých slepých uličiek bludiska:



Vidíme, že cesta bludiskom sa na troch miestach rozdvojí a zase spojí. Aby sme pri ceste bludiskom platili čo najmenej, tak si pri každom rozdvojení potrebujeme vybrať tú cestu, kde zaplatíme menej. Trasa bludiskom preto bude vyzerať takto:



Pri tom zaplatíme 10 €.

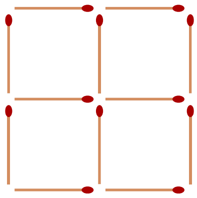
Úloha 11. Zvyšok papiera

Filipovi po hodine geometrie zostala nepopísaná štvorčeková sieť v tvare štvorca s dĺžkou 1 dm so štvorčekmi so stranou 1 cm. Rozhodol sa, že si ju vyfarbí. Najprv vyfarbil všetky štvorčeky po obvode nepopísanej časti štvorčekovej siete a v tom zazvonilo na ďalšiu hodinu, takže viac už nestihol. Koľko štvorčekov Filip stihol vyfarbiť?

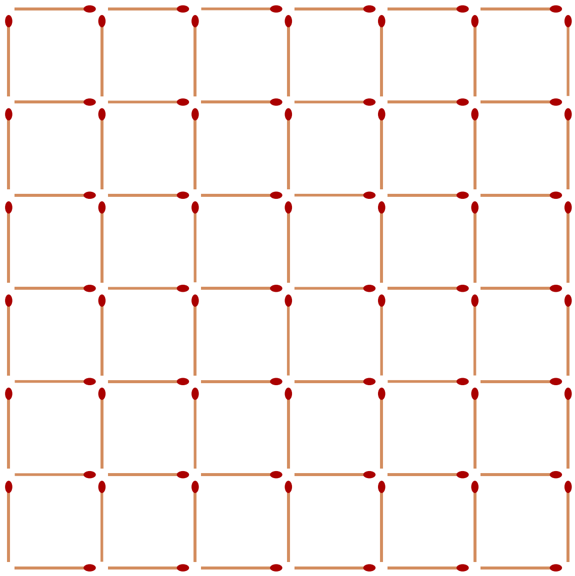
Výsledok: 36
Riešenie: Jedna strana nepopísanej časti štvorčekovej siete má 1 dm = 10 cm, čiže je tvorená 10 štvorčekmi. Štyri strany štvorca majú teda 40 štvorčekov, nesmieme však zabudnúť, že 4 rohové štvorčeky patria zároveň dvom stranám, takže sme ich započítali dvakrát. Preto Filip stihol vyfarbiť 40 - 4 = 36 štvorčekov.

Úloha 12. Zápal pre hru

Zajo sa hrá so zápalkami. Poukladal ich tak, že vytvorili 4 štvorce v mriežke 2 × 2 ako na obrázku. Použil pri tom 12 zápaliek. Teraz by chcel ešte väčšiu mriežku. Vytvorí mriežku, ktorá bude obsahovať 36 štvorcov v mriežke 6 × 6. Koľko zápaliek na to použije?



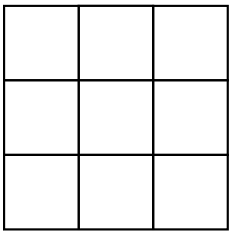
Výsledok: 84
Riešenie: Mriežka bude vyzerať tak ako na tomto obrázku:



Spočítajme zvlášť zvislé a zvlášť vodorovné zápalky. Zvislé sú v 7 stĺpcoch po 6 zápalky. Vodorovné sú v 7 riadkoch po 6 zápaliek. Oboch typov zápaliek je teda 7 · 6 = 42. Všetkých zápaliek je tak 42 + 42 = 84.

Úloha 13. Nepárna tabuľka

Kubo si nakreslil tabuľku 3 × 3. Do každého políčka by chcel napísať prirodzené číslo tak, aby bol súčet čísel v každom riadku a každom stĺpci nepárny. Koľko najmenej nepárnych čísel napíše Kubo do celej tabuľky?



Výsledok: 3
Riešenie: V každom riadku sú tri čísla, ktorých súčet má byť nepárny. V každom riadku tak musí byť buď jedno nepárne číslo a dve párne, alebo tri nepárne čísla. Najmenší počet nepárnych čísel by tak mohol byť, keby v každom riadku bolo iba jedno nepárne číslo. Tabuľku naozaj vieme vyplniť tak, aby sme použili v každom riadku iba jedno nepárne číslo a podmienka zo zadania platila aj pre stĺpce. Napríklad takto:

1	2	2
2	1	2
2	2	1

Preto Kubo napíše do tabuľky najmenej 3 nepárne čísla.

Úloha 14. Brutálna nuda

Majo sa v poslednej dobe veľmi nudí. Napísal si na papier všetky dvojciferné čísla, ktoré obsahovali iba cifry 1, 2, 3 a 4. Všetky tieto čísla sčítal. Aký výsledok dostal?

Výsledok: 440
Riešenie: Všetky čísla, ktoré bude Majo sčitovať si vieme zapísať do takejto sčitovacej tabuľky:

+	1	2	3	4
10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34
40	41	42	43	44

Z toho veľmi dobre vidíme, že Majo do celkového súčtu akoby zarátava iba čísla 1, 2, 3, 4, 10, 20, 30 a 40 - každé presne štyrikrát. Celkový súčet preto bude $(1 + 2 + 3 + 4 + 10 + 20 + 30 + 40) \cdot 4 = 110 \cdot 4 = 440$.

Úloha 15. Zvyky zabúdať peňaženku

8 priateľov jedlo v reštaurácii a dohodli sa, že každý zaplatí rovnakú sumu. Viki si ale zabudla peňaženku, a tak každý z jej siedmich priateľov zaplatil o 1 € viac, aby tak pokryli celkové náklady. Koľko eur platili všetci spolu?

Výsledok: 56
Riešenie: Každý zo siedmich priateľov Viki zaplatil za ňu o 1 € viac. Viki tak mala platiť 7 €. Každý z ôsmich priateľov mal platiť rovnakú sumu. Aj Viki. Každý teda platil 7 €. Spolu tak zaplatili $8 \cdot 7$ € = 56 €.

Úloha 16. Koho je viac?

Palo robil na svojej škole štatistiku. 40 % žiakov tvoria chlapci. Spomedzi chlapcov hrá 25 % z nich na gitare. Spomedzi dievčat hrá 10 % z nich na gitare. Ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé?

a) Na gitare hrá viac chlapcov ako dievčat.
b) Na gitare hrá rovnako veľa chlapcov ako dievčat.
c) Na gitare hrá viac dievčat ako chlapcov.

Výsledok: a)
Riešenie: Chlapci tvoria 40 % žiakov školy, čiže 40 / 100 = 2 / 5. Dievčatá tak tvoria 1 - 2 / 5 = 3 / 5 všetkých žiakov. 25 % chlapcov, čiže 1 / 4, hrá na gitare, takže chlapci hrajúci na gitare tvoria 2 / 5 · 1 / 4 = 2 / 20 = 1 / 10 všetkých žiakov školy. Podobne 10 % dievčat, čiže 1 / 10, hrá na gitare, a preto dievčatá hrajúce na gitare tvoria 3 / 5 · 1 / 10 = 3 / 50 všetkých žiakov školy. Keďže však 1 / 10 = 5 / 50 > 3 / 50, tak vieme povedať, že na gitare hrá viac chlapcov ako dievčat.

Úloha 17. Stres pred písomkou

Katka má o 10:00 písomku z matematiky, no ešte predtým si potrebuje pozrieť záznam predošlej vyučovacej hodiny. Vyučovacia hodina trvá 45 minút. Spolužiaci Katke poradili, že prvých 9 minút učiteľ opakuje, takže to Katka nemusí pozerať. Zvyšok hodiny zaberie teória a počítanie úloh, pričom počítanie úloh trvá 5-krát dlhšie. Učiteľ je veľmi pomalý, preto Katka pozerá teóriu na dvojnásobnej rýchlosti a úlohy na 1,5-násobnej rýchlosti. O koľkej najneskôr môže Katka začať pozerať hodinu, aby ju stihla dopozerať pred písomkou?

a) 9:42 *b) 9:37* *c) 9:31* *d) 9:28* *e) 9:24*

Výsledok: b)
Riešenie: Teória a úlohy zaberú 45 - 9 = 36 minút hodiny. Počítanie úloh zaberie 5-krát viac času ako teória. Ak teda zaberá teória 1 "dielik času", tak počítanie úloh zaberie 5 dielikov. Teória tak zaberá 1 zo 6 dielikov. Preto tvorí teória šestinu z 36 minút, teda 36 : 6 = 6 minút. Počítanie úloh zaberie 36 - 6 = 30 minút. Katke to bude trvať o čosi menej. Pozeranie teórie Katke zaberie 6 : 2 = 3 minúty. Pozeranie úloh jej zas zaberie 30 : 1,5 = 20 minút. Spolu tak strávi pozeraním hodiny 3 + 20 = 23 minút. Preto musí začať pozerať 23 minút pred 10:00, čiže o 9:37.

Úloha 18. Mišo a jeho žaba

Mišo má doma žabu a hrá sa s ňou. Položí ju na dlhý pásik papiera, na ktorom má vyznačené štvorčeky. Žaba po pásiku začne skákať. Najprv skočí o 1 dopredu, potom o 2 políčka vzad, následne o 3 políčka vpred, následne o 4 políčka vzad a takto pokračuje ďalej. V každom skoku preskočí o 1 políčko viac ako v predošlom skoku a strieda to, či skáče dopredu alebo dozadu. Po 2021 skokoch ju to už prestane baviť a preskočí na políčko, na ktorú ju Mišo na začiatku položil. O koľko políčok skočí?

Výsledok: 1011
Riešenie: Po prvom skoku je žaba o políčko pred tým, na ktoré bola položená. Po ďalších dvoch skokoch sa vzdiali o ďalšie políčko. Takto to bude pokračovať aj ďalej, pretože vždy skočí o nejaký počet políčok vzad a potom o o jedno políčko väčší počet vpred. Po 2020 : 2 = 1010 takýchto dvojskokoch sa vzdiali o ďalších 1010 políčok - od políčka, na ktoré bola položená, bude vzdialená 1 + 1010 = 1011 políčok. V poslednom skoku tak skočí o 1011 políčok vzad.

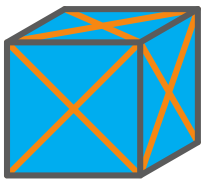
Úloha 19. Mona Lisa

Niekto ukradol obraz z múzea. Vyšetrovanie ukázalo, že sa k tomu vedia vyjadriť traja ľudia - strážnik, lupič a mafiánsky boss. Lupič obraz síce ukradol, ale už ho vlastní mafiánsky boss. Okrem toho strážnik hovorí pravdu, lupič klame a mafiánsky boss môže klamať a aj hovoriť pravdu. Pred súdom vystupovali iba ako osoby A, B a C. Povedali nasledovné:
Osoba A: Osoba C klame a ja nemám obraz.
Osoba B: Ak som obraz neukradol, tak ho ani nevlastním.
Osoba C: Klamem práve vtedy, keď klame osoba A.
Ktorá z osôb A, B alebo C má ukradnutý obraz?

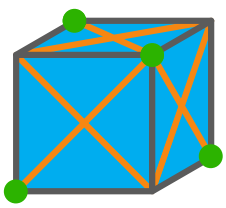
Výsledok: B
Riešenie: Začnime rozobratím prípadov podľa toho, či osoba C hovorí pravdu. Ak hovorí pravdu, tak podľa svojho výroku musí aj osoba A hovoriť pravdu. Osoba A však potom hovorí, že C klame, čo nie je pravda. Preto C nemôže hovoriť pravdu, teda klame.
Keby aj osoba A klamala, tak by bol výrok osoby C pravdivý. C klame, a preto A nemôže klamať, a teda hovorí pravdu. Z toho vieme, že osoba A hovorí pravdu a nemá obraz, takže je to strážnik.
Ďalej rozoberme prípady podľa toho, či osoba B hovorí pravdu. Najprv sa zamyslime nad tým, čo ak hovorí pravdu. Jediný, kto ešte môže hovoriť pravdu, je boss. Ten ale nemôže pravdivo povedať vetu osoby B - on totiž obraz neukradol, ale vlastní ho. Osoba B tak musí klamať.
Zlodej však nemôže povedať vetu osoby B. On obraz ukradol. Preto akákoľvek podmienka o tom, čo by sa stalo, keby on obraz neukradol, bude pravdivá. Lenže on klame.
Takže jediná možnosť je, že osoba B je boss, o ktorom sme sa už presvedčili, že nemôže povedať vetu osoby B a pritom hovoriť pravdu. Ale keď klame, tak to môže povedať.
Tým sme dospeli k tomu, že osoba B je boss, a tak je ukradnutý obraz u osoby B.

Úloha 20. Ferdo na kocke

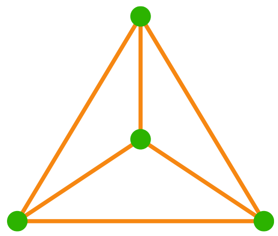
Ferdo mravec sa so štetcom prechádza po kocke. Táto kocka má na každej stene vyznačené obe uhlopriečky tejto steny. Ferdo začína v jednom z vrcholov kocky. Zakaždým si vyberie uhlopriečku a prejde po nej, pričom ju celú zafarbí nazeleno. Takto pokračuje, až kým neskončí vo vrchole takom, že všetky uhlopriečky obsahujúce tento vrchol sú už zelené. Koľko najviac uhlopriečok (zo všetkých 12) sa môže Ferdovi podariť zazelenať?



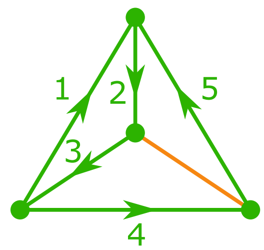
Výsledok: 5
Riešenie: Nech Ferdo začína vo vrchole vľavo dole. Pozrime sa, do ktorých vrcholov sa Ferdo vôbec vie dostať. Po chvíli hrania sa si môžeme všimnúť štyri vrcholy vyznačené zelenou na tomto obrázku:



Všetky uhlopriečky, ktoré majú aspoň jeden krajný bod v zelenom vrchole, majú oba krajné body v zelenom vrchole. To znamená, že pomocou uhlopriečok vedúcich zo zelených vrcholov sa vie Ferdo dostať len do iných zelených vrcholov a žiadnych iných. Medzi zelenými vrcholmi vedie 6 uhlopriečok, zvyšných 6 uhlopriečok určite nevyužije.
Otázkou zostáva, koľko najviac uhlopriečok z týchto 6 vedúcich medzi zelenými vrcholmi vie Ferdo prejsť. Pre lepšiu prehľadnosť si ich vieme prekresli tak ako na obrázku:



Vedeli by Ferdo prejsť všetkých 6 uhlopriečok? Ukážeme, že nie. V nejakom zelenom vrchole potrebuje Ferdo začať a v nejakom skončiť. Zvyšnými dvoma zelenými vrcholmi bude len prechádzať. Zakaždým, keď nejakým vrcholom prechádza, musí doň po nejakej uhlopriečke vojsť a po nejakej uhlopriečke z neho vyjsť. Tým "spotrebuje" dve uhlopriečky. Z každého vrcholu však vychádzajú 3 uhlopriečky, takže po jednom prejdení vrcholom už ním nebude vedieť znova prejsť, iba v ňom skončiť. Žiadny vrchol tak nemôže byť tým, ktorým by Ferdo iba prechádzal, a preto nevie prejsť všetkých 6 uhlopriečok. Prejsť 5 uhlopriečok sa už Ferdovi podarí:



Tým sme ukázali, že Ferdo vie zazelenať 5 uhlopriečok a že viac ich určite nezazelená, takže zazelená najviac 5 uhlopriečok.