matboj

17.02.2022

Vzorové riešenia

Kategórie 5, 6, Príma

p-mat

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

EURÓPSKA ÚNIA

Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

Úloha 01. *Viki sa chystá upiecť koláč. Podľa receptu by doň malo ísť 200 g hladkej múky a nezaškodí, ak jej bude o niečo viac. Zistila však, že nemá čím odmerať týchto 200 g. Vygooglila si, že polievková lyžica hladkej múky váži 8 až 10 gramov. Koľko polievkových lyžíc hladkej múky musí Viki nasypať do misky, aby v nej bolo určite aspoň 200 g hladkej múky?*

Výsledok: 25
Riešenie: Aby mala Viki istotu, že naváži aspoň 200 g múky, musí predpokladať najhoršiu možnosť. Teda, že polievková lyžica múky váži 8 gramov. Vtedy bude potrebovať nasypať do misky 200 g : 8 g = 25 lyžíc múky.

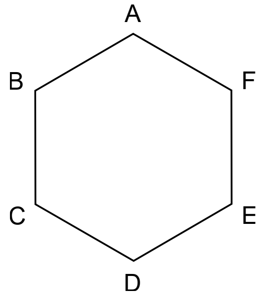
Úloha 02. *Braňo sa nudil na hodine matematiky a tak si začal písať trojciferné čísla. Písal a písal, až ich napísal všetky. Koľko z čísel, ktoré Braňo napísal, malo ciferný súčet 3?*

Výsledok: 6
Riešenie: Vypíšme si čísla s ciferným súčtom 3 podľa toho, akú cifru majú na mieste stoviek. Ak je na mieste stoviek cifra 1, tak máme tri možnosti:
120, 111 a 102
Ak je na mieste stoviek cifra 2, tak máme dve možnosti:
210 a 201
Napokon, ak je na mieste stoviek cifra 3, tak máme jedinú možnosť:
300
Ak by bola cifra na mieste stoviek väčšia ako 3, tak by aj ciferný súčet bol väčší ako 3.
Spolu preto existuje 3 + 2 + 1 = 6 trojciferných čísel s ciferným súčtom 3. Čiže Braňo vypísal 6 čísel s ciferným súčtom 3.

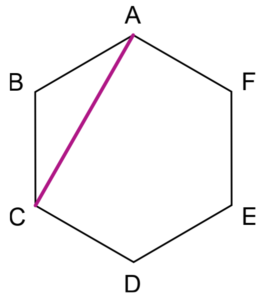
Úloha 03. *Terka si píše na papier čísla. Začala tým, že si napísala číslo 2022. Ďalej bude za toto číslo písať čísla, a to nasledovne:*
- Ak je posledné napísané číslo párne, tak ho vydelí dvomi a výsledok napíše ako ďalšie číslo.
- Ak je posledné napísané číslo nepárne, tak ho zmenší o jedna a výsledok napíše ako ďalšie číslo. Koľko čísel bude napísaných na papieri po tom, čo naň Terka napíše číslo 1?

Výsledok: 18
Riešenie: Vypíšme si čísla, ako budú napísané na Terkinom papieri:
2022 → 1011 → 1010 → 505 → 504 → 252 → 126 → 63 →
→ 62 → 31 → 30 → 15 → 14 → 7 → 6 → 3 → 2 → 1
Po napísaní čísla 1 tak bude na papieri 18 čísel.

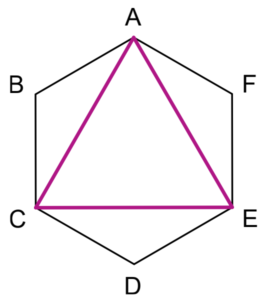
Úloha 04. *Majo má na papieri nakreslený pravidelný šesťuholník ABCDEF s vyznačenými stranami. Do vrcholu A postaví mravca so štetcom. Mravec sa začne prechádzať – prejde po nejakej ešte nevyznačenej uhlopriečke a vyznačí ju. Pritom ale nesmie prejsť cez inú vyznačenú uhlopriečku. Po konci mravcovho prechádzania sa Majo rozstrihá útvar na papieri po vyznačených čiarach. Majo chce, aby sa po takomto rozstrihaní šesťuholník rozpadol na samé trojuholníky. Koľkými spôsobmi sa môže mravec poprechádzať, aby to mohol Majo spraviť?*

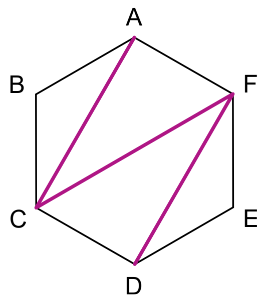


Výsledok: 4
Riešenie: Z vrcholu *A* môže ísť mravec do niektorého z vrcholov *C*, *D* alebo *E*.
Ak pôjde do vrcholu *C*, tak máme takúto situáciu:

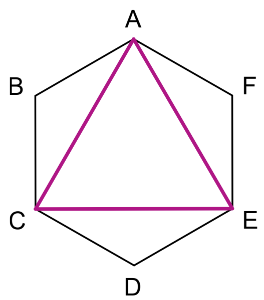


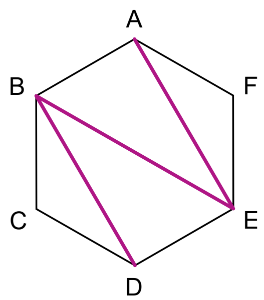
Mravec môže pokračovať do vrcholu *E* alebo *F*. Ak si vyberie vrchol *E*, tak sa potom vyberie do vrcholu *A*, kde skončí. Rovnako ak si vyberie vrchol *F*, tak sa potom vyberie do vrchol *D*, kde skončí. V oboch prípadoch naozaj dostaneme po rozstrihaní samé trojuholníky:



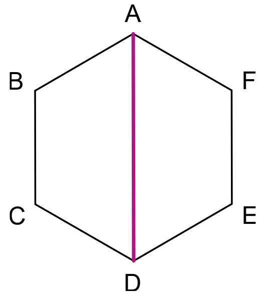


Podobnú situáciu, len osovo súmernú, dostaneme, ak by si mravec na začiatku vybral vrchol *E*:

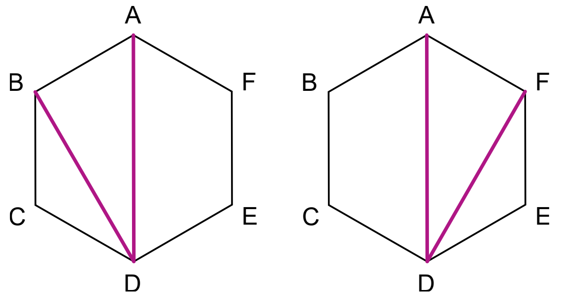




Zostáva situácia, že si mravec na úvod vybral vrchol *D*:



V tom prípade môže pokračovať iba do vrcholov *B* a *F*. V oboch prípadoch ale v týchto vrcholoch skončí, a tak po rozstrihnutí nevzniknú samé trojuholníky:



Spolu tak máme 4 možnosti, ako sa mohol mravec poprechádzať.

Úloha 05. *Samo zabudol svoj vek. Zase. Vie, že je to také dvojciferné číslo, ktoré je 5-krát väčšie ako jeho ciferný súčet. Koľko má Samo rokov?fay*

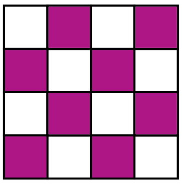
Výsledok: 45
Riešenie: Samkov vek je päťnásobkom nejakého čísla. Musí sa preto končiť cifrou 0 alebo cifrou 5. Ak by sa však končil cifrou 0, tak by sa jeho ciferný súčet rovnal prvej cifre. V tom prípade však bol Samkov vek 10-krát väčší ako jeho ciferný súčet a nie 5-krát, ako potrebujeme. Samkov vek sa preto nekončí cifrou 0, čiže sa končí cifrou 5.
Zostáva prejsť dvojciferné čísla končiace sa cifrou 5. Prechádzajme ich postupne. Začnime na čísle 15 a postupne zvyšujme prvú cifru. Všimnime si, že keď zvýšime prvú cifru, tak samotné číslo zväčšíme o 10, no päťnásobok ciferného súčtu zvýšime iba o 5. Vďaka tomu už ľahko nájdeme, že vyhovuje číslo 45.
Samo má 45 rokov.

Úloha 06. *Maťo dostal pred Vianocami adventný kalendár, na ktorom sú okienka s číslami od 1 do 24. Namiesto klasického otvárania od 1 po 24 sa rozhodol otvárať ich inak – v ľubovoľnom poradí. Dal si ale podmienku: keď otvorí okienko s nejakým číslom, rozdiel žiadnych dvoch otvorených okienok nemôže byť násobkom čísla 13. Koľko najviac okienok Maťo otvorí tak, aby dodržal svoju podmienku?*

Výsledok: 13
Riešenie: Pozerajme sa na zvyšky čísel od 1 do 24 po delení 13. Ak majú dve čísla rovnaký zvyšok po delení 13, tak ich rozdiel je deliteľný číslom 13. Každé číslo totiž vieme zapísať ako násobok 13 plus zvyšok po delení 13. Keď budeme odčítavať dve čísla s rovnakým zvyškom, tak sa ich zvyšky odčítajú a akoby sme odčitovali iba tie ich časti, ktoré sú násobkom 13. A rozdiel dvoch násobkov 13 je opäť násobok 13. Maťo preto mohol pre každý zvyšok po delení 13 otvoriť najviac jedno okienko, ktorého

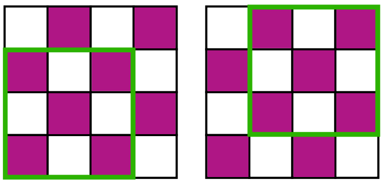
číslo má tento zvyšok. To mohol docieliť napríklad otvorením okienok s číslami 1 až 13. Takže mohol otvoriť najviac 13 okienok.

Úloha 07. *Barborku prestal baviť klasický šach. Tak si nakreslila novú šachovnicu 4 × 4 s bielymi a fialovými políčkami tak ako na obrázku. Koľko sa na obrázku nachádza štvorcov ľubovoľnej veľkosti, ktoré vo svojom vnútri majú viac fialových políčok ako bielych políčok?*



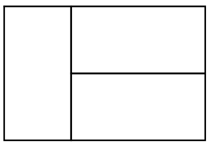
Výsledok: 10

Riešenie: Štvorce 2 × 2 a 4 × 4 obsahujú rovnaký počet bielych a fialových políčok. Preto aby mohol nejaký štvorec obsahovať viac fialových políčok, musí to byť štvorec 1 × 1 alebo 3 × 3. Štvorec 1 × 1, ktorý obsahuje viac fialových políčok, je v skutočnosti fialové políčko. Tých je 8. Štvorec 3 × 3 s viac fialovými políčkami obsahuje 5 fialových políčok. Takéto štvorce sú dva:



Hľadaných štvorcov je spolu 8 + 2 = 10.

Úloha 08. *Kika má záhradu tvaru obdĺžnika. Vie ju rozdeliť na tri rovnaké obdĺžnikové záhony tak ako na obrázku. Kratšia strana každého zo záhonov má dĺžku 5 m. Koľko metrov pletiva by Kika potrebovala na oplotenie celej záhrady?*

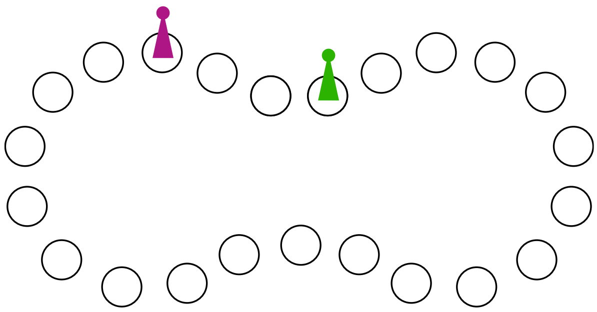


Výsledok: 50

Riešenie: Z obrázka vidno, že dlhšia strana obdĺžnikových záhonov musí byť dvakrát dlhšia ako kratšia strana záhonov. Má preto dĺžku 2 · 5 m = 10 m. Dlhšia strana Kikinej záhrady je tak dlhá 5 m + 10 m = 15 m a kratšia strana je dlhá 10 m. Na oplotenie celej záhrady Kika potrebuje 15 m + 10 m + 15 m + 10 m = 50 m pletiva.

Úloha 09. *Anička s Beátkou sa hrajú hru na plániku s 23 políčkami na obrázku. Anička si naň položila fialovú figúrku a Beátka zelenú figúrku. Vždy, keď Anička tleskne, posunú fialovú figúrku o dve políčka proti smeru hodinových ručičiek a súčasne zelenú figúrku o jedno políčko v smere hodinových ručičiek. Po koľkých Aničkiných tlesknutiach budú obe figúrky na rovnakom políčku?*

Výsledok: 22

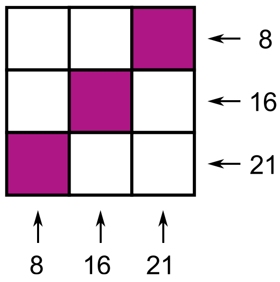


Riešenie: Situácia sa nezmení, ak budeme posúvať vždy iba fialovú figúrku o 3 políčka proti smeru hodinových ručičiek a zelená figúrka bude stáť na mieste. Vieme si to totiž predstaviť tak, že okrem pôvodných ťahov každú figúrku posunieme ešte o políčko proti smeru hodinových ručičiek.
Pozrime sa na situáciu akoby o jedno tlesknutie dozadu pred pôvodným rozložením. Vtedy je fialová figúrka na rovnakom mieste ako zelená figúrka. Na zodpovedanie pôvodnej otázky sa zíde zistiť, po koľkých tlesknutiach od tohto momentu sa fialová figúrka vráti na svoje pôvodné miesto. Hýbe sa vždy o 3 políčka, no plánik pozostáva z 23 políčok. Figúrka sa vráti na pôvodné miesto ak prejde počet políčok, ktorý je násobkom 23. Najmenší násobok 23, ktorý je zároveň násobkom 3, je 23 · 3 = 69. Fialová figúrka sa tak vráti na pôvodné miesto po 23 tlesknutiach.
Situácia, že sa fialová figúrka potrebovala vrátiť na pôvodné miesto, nastala pred jedným tlesknutím, takže obe figúrky budú na rovnakom políčku po 23 - 1 = 22 tlesknutiach.

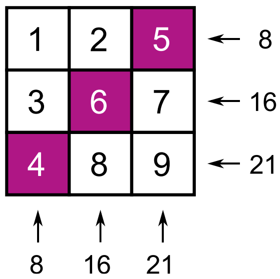
Úloha 10. *Šimon a Barborka sa hrajú. Do nepriehľadného vrecúška dali 100 papierikov s číslami 1 až 100. Každý z nich si potajomky vybral jeden z papierikov a potom sa udial takýto rozhovor:*
Barborka: „Neviem určiť, kto z nás dvoch si vytiahol menšie číslo.“
Šimon: „Vďaka za informáciu. Vďaka nej teraz už viem určiť, kto z nás si vytiahol menšie číslo.“
Barborka: „To fakt? A je tvoje vytiahnuté číslo párne?“
Šimon: „Presne tak.“
Barborka: „Tak to keď sčítame naše čísla, dostaneme súčet 84.“
Aké číslo si vytiahla Barborka?

Výsledok: 82
Riešenie: Prvá Barborkina veta hovorí, že ona nemá číslo 1 alebo 100. Inak by totiž vedela, kto má menšie číslo. Túto informáciu dostal Šimon a keďže jemu už pomohla rozhodnúť, kto má menšie číslo, tak musí mať niektoré z čísel 2 alebo 99. Následná Barborkina otázka a Šimonova odpoveď rozhodne, že to je číslo 2. Keďže Barborka nám na konci povie, že súčet jej a Šimonovho čísla je 84, tak Barborka si vytiahla číslo 84 - 2 = 82.

Úloha 11. *Panda si nakreslil tabuľku 3 × 3, do ktorej začal písať čísla. Chce do každého políčka napísať jedno z čísel 1 až 9 a každé použiť iba raz. Navyše má špeciálne požiadavky:*
- Súčet čísel v prvom riadku a taktiež súčet čísel v prvom stĺpci má byť 8.
- Súčet čísel v druhom riadku a taktiež súčet čísel v druhom stĺpci má byť 16.
- Súčet čísel v treťom riadku a taktiež súčet čísel v treťom stĺpci má byť 21.
Keď sa to Pandovi podarí, vypočíta súčin čísel na uhlopriečke tvorenej fialovými štvorčekmi. Aký súčin Panda dostane?

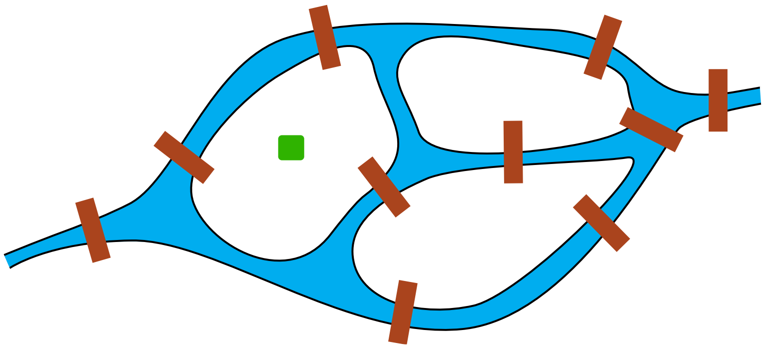


Výsledok: 120
Riešenie: Súčet 8 sa dá dostať iba dvomi spôsobmi: 8 = 1 + 2 + 5 a 8 = 1 + 3 + 4. V ľavom hornom rohu tak bude číslo 1 a obe tieto kombinácie čísel musíme použiť. Číslo 21 sa dá dostať tromi spôsobmi: 21 = 9 + 8 + 4, 21 = 9 + 7 + 5 a 21 = 8 + 7 + 6. Do tretieho riadku či stĺpca ale musia zasahovať kombinácie čísel 1 + 2 + 5 a 1 + 3 + 4 z prvého riadka a stĺpca. To vylučuje možnosť 21 = 8 + 7 + 6, lebo žiadne z týchto čísel sa v kombináciách prvého riadka a stĺpca nenachádza. Musia sa tak použiť kombinácie 21 = 9 + 8 + 4 a 21 = 9 + 7 + 5, v pravom dolnom rohu tak bude číslo 9. Jediné číslo, ktoré sme nepoužili, je číslo 6, ktoré dáme do stredu tabuľky. Celé vyplnenie tak bude vyzerať takto:

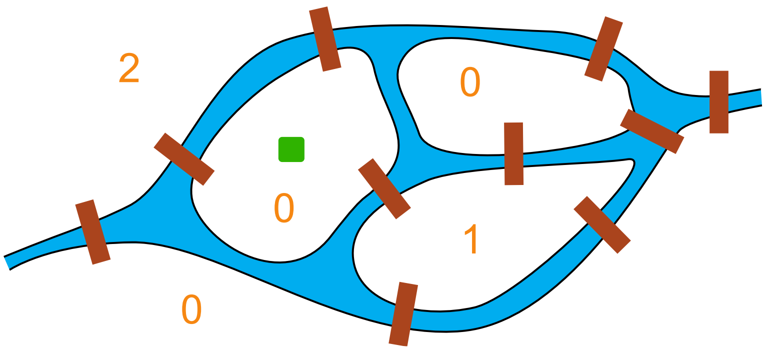


Súčin čísel na uhlopriečke tvorenej fialovými štvorčekmi bude $4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$.

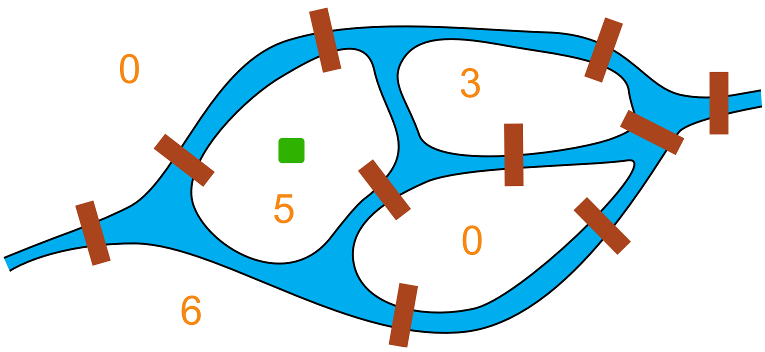
Úloha 12. *Leonard sa vyskytol v meste s riekou. Rieka v tomto meste vytvára niekoľko ostrovov, ktoré sú medzi sebou a s brehmi rieky poprepájané mostami. Leonard našiel plán mostov v tomto meste. Zistil, že sa nachádza na zelenom štvorčeku. Chcel by sa poprechádzať po mostoch tak, že prejde presne po 4 (nie nutne rôznych) mostoch a vráti sa naspäť do zeleného štvorca. Koľkými spôsobmi sa môže Leonard poprechádzať po mostoch?*



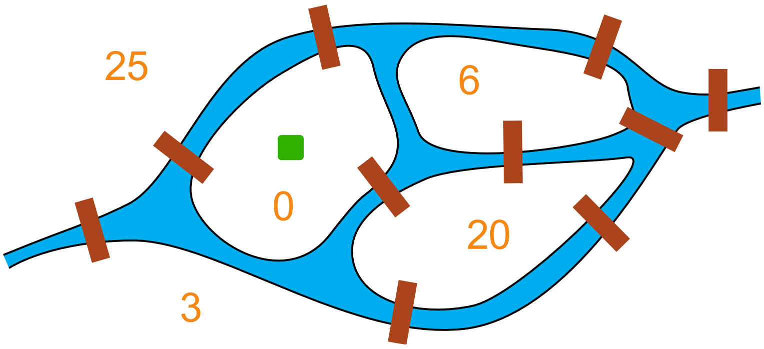
Výsledok: 70
Riešenie: Aj časti brehu nazývajme ostrovmi. Ku každému ostrovu si napíšeme niekoľko čísel. Najprv si napíšme, koľkými spôsobmi sa na daný ostrov vieme dostať tak, že prejdeme jedným mostom. To spočítame ľahko tým, že spočítame, koľko mostov vedie z ostrova so zeleným štvorčekom na daný ostrov. Dostaneme takýto obrázok:



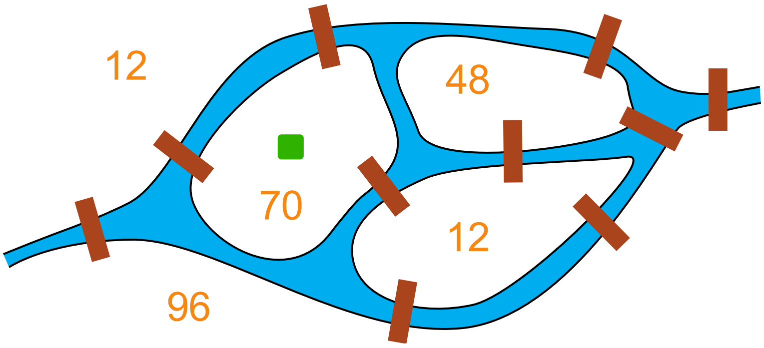
Ďalej pre každý ostrov spočítajme, koľkými spôsobmi sa naň vieme dostať použitím dvoch mostov. Pre daný ostrov to spočítame tak, že sčítame čísla na ostrovoch, na ktorých končia mosty z daného ostrova. Ak sú medzi nejakými ostrovmi dva mosty, tak príslušné číslo započítame dvakrát. Týmto naozaj počítame počet prechádzok po presne dvoch mostoch. To preto, lebo za každý most vedúci na daný ostrov spočítame počet prechádzok, v ktorých je tento most posledným použitým a predtým sme použili nejaký jeden iný most. Takýmto spôsobom dostaneme pre každý ostrov nové číslo, ktorým prepíšme číslo z predošlého obrázka:



Teraz zopakujeme predošlý krok a dostaneme pre každý ostrov počet prechádzok po troch mostoch končiacich na danom ostrove. Opäť teda pre daný ostrov spočítajme čísla na opačných stranách každého mostu, ktorý z neho vedie. Pre každý most tým počítame prechádzky po troch mostoch, kde je daný most použitý ako posledný a predtým sme použili nejaké dva mosty. Znova dostaneme pre každý ostrov nejaké číslo, ktorým prepíšeme to z predošlého kroku:



Zostáva už len raz zopakovať ten istý postup, teraz by to stačilo už len pre ostrov so zeleným štvorčekom. Dostaneme takýto obrázok:



Z neho už vidíme, že Leonard sa môže prejsť po mostoch 70 spôsobmi.

Úloha 13. *Samo sa hrá s hracími kockami. Hracia kocka má na svojich stenách 1 až 6 bodiek, každý počet raz. Samo by chcel zlepiť dve kocky stenami tak, aby na viditeľných stenách bolo čo najviac bodiek. Koľko bodiek bude vidno na kockách, keď sa mu to podarí?*

Výsledok: 40
Riešenie: Dve kocky majú na svojich stenách spolu 2 · (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 2 · 21 = 42 bodiek. Aby bolo vidno čo najviac bodiek musí Samo zlepiť steny, kde je bodiek najmenej, teda steny s jednou bodkou. Takúto stenu zakryje na oboch kockách. Po zlepení tak bude na kockách vidno 42 - 1 - 1 = 40 bodiek.

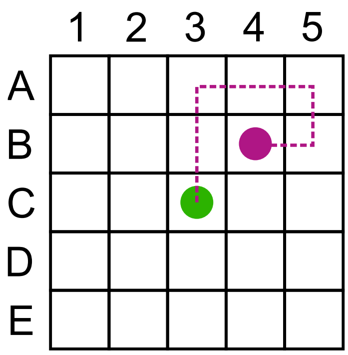
Úloha 14. *Sedem žiakov si na hodine telesnej výchovy meralo svoju výšku. Zistili, že sa vedia postaviť do radu od najmenšieho po najväčšieho tak, že ich výšky budú v tomto rade narastať vždy o rovnakú dĺžku. Andrej je najvyšší a má výšku 196 cm. Na druhej strane najnižší je Gabo s výškou 154 cm. Koľko centimetrov meria Boris, ktorý je druhý najvyšší?*

Výsledok: 189
Riešenie: Výška žiakov v rade narastie 6-krát. Pritom musí narásť dokopy o 196 cm - 154 cm = 42 cm. Pri každom náraste tak výška narastie o 42 cm : 6 = 7 cm. Boris je o týchto 7 cm nižší ako najvyšší Andrej, takže Boris má výšku 196 cm - 7 cm = 189 cm.

Úloha 15. *Tomáš si vytvoril deväť kartičiek postupne s číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9. Potom si na papier napísal všetky možné súčty čísel na dvoch rôznych kartičkách. Zakrúžkoval si výsledky, ktoré boli párne. Koľko rôznych čísel Tomáš zakrúžkoval?*

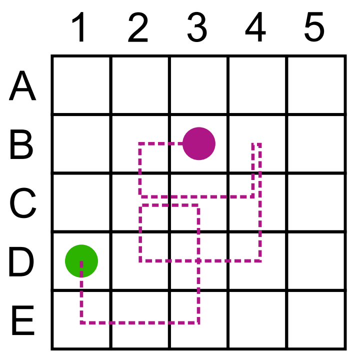
Výsledok: 7
Riešenie: Najmenší párny súčet, ktorý môže Tomáš dostať, je 1 + 3 = 4. Na druhej strane najväčší párny súčet, ktorý môže dostať, je 7 + 9 = 16. Tomáš taktiež môže dostať ľubovoľný párny súčet medzi týmito číslami, teda môže dostať súčty 4, 6, 8, 10, 12, 14 a 16. Spolu tak zakrúžkoval 7 rôznych čísel.

Úloha 16. *Kubo vyhrabal na povale svojho robota. Keď ho postaví na štvorčekovú sieť, tak mu vie dávať pokyny, ako sa má pohnúť, a to nasledovne:*
Ak mu Kubo dá pokyn H – robot sa posunie o jedno políčko hore.
Ak mu Kubo dá pokyn D – robot sa posunie o jedno políčko dole.
Ak mu Kubo dá pokyn P – robot sa posunie o jedno políčko doprava.
Ak mu Kubo dá pokyn L – robot sa posunie o jedno políčko doľava.
Teda ak by Kubo postavil robota na zelený krúžok na políčku C3 a zadal mu pokyny HHPPDL, tak by sa



robot pohol ako na obrázku a skončil by na fialovom krúžku na políčku B4. Na ktorom políčku by robot skončil, keby ho Kubo postavil na políčko D1 a dá mu pokyny DPPHHLDPPHHDLLHP?

Výsledok: B3
Riešenie: Nakreslime si dráhu, po ktorej robot prejde:



Z toho ľahko prečítame, že Kubov robot skončí na políčku B3.

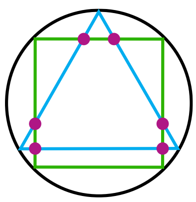
Úloha 17. *Roman si obľúbil isté trojciferné číslo. Samo o sebe nie je až tak zaujímavé. Tak si Roman napísal na papier tri čísla. Jedno z nich bolo jeho obľúbené číslo. Ďalej Roman napísal svoje obľúbené číslo zaokrúhlené na desiatky. Napokon napísal svoje obľúbené číslo zaokrúhlené na stovky. Všetky tri čísla na papieri sčítal a dostal tak číslo 2022. Akú hodnotu má Romanovo obľúbené číslo?*

Výsledok: 662
Riešenie: Sčítavanie našich troch čísel so súčtom 2022 vieme zapísať pod seba ako na obrázku:

$$\begin{array}{ccccc} & & \square & \square & \square \\ + & & \square & \square & 0 \\ + & & \square & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

V prvom riadku je Romanovo číslo a v ďalších dvoch sú výsledky jednotlivých zaokrúhlení. Hneď vidíme, že cifra na mieste jednotiek v Romanovom čísle musí byť 2. Ďalej vieme povedať, že cifra na mieste stoviek je 6 – ak by tam bola cifra 7 (alebo väčšia), tak by bol súčet aspoň $3 \cdot 700 = 2100$; ak by tam bola cifra 5 (alebo menšia), tak ani po zaokrúhleniach všetkých troch čísel nahor na 600 nedostaneme číslo väčšie ako $3 \cdot 600 = 1800$. Ak by sa pri zaokrúhľovaní na stovky nezvýšila cifra na mieste stoviek, tak by neznáme desiatky mali vytvoriť súčet $2022 - 602 - 600 - 600 = 220$. To dve rovnaké dvojciferné čísla určite nedokážu. Preto pri zaokrúhľovaní na stovky budeme zvyšovať cifru na mieste stoviek v treťom čísle, teda po zaokrúhlení dostaneme číslo 700. Cifry na mieste desiatok teraz musia vytvoriť súčet $2022 - 602 - 600 - 700 = 120$. To ľahko zariadime tým, že na mieste desiatok v Romanovom čísle bude cifra 6. Romanovo číslo je preto 662.

Úloha 18. *Paťo si nakreslil kružnicu a vpísal do nej rovnostranný trojuholník a štvorec tak, že nemali žiadny spoločný vrchol. Dopadlo to tak ako na obrázku – trojuholník a štvorec sa pretli v 6 rôznych bodoch. Potom Paťo nakreslil druhú kružnicu a vpísal do nej pravidelný päťuholník a pravidelný sedemuholník tak, že nemali žiadny spoločný vrchol. V koľkých rôznych bodoch sa tieto dva útvary pretli?*



Výsledok: 10
Riešenie: Vrcholy päťuholníka rozdelia kružnicu na 5 rovnako veľkých oblúkov. Podobne aj vrcholy sedemuholníka rozdelia kružnicu na 7 rovnako veľkých oblúkov. Tieto budú ale menšie ako oblúky, na ktoré rozdelí kružnicu päťuholník. Všimnime si, že na každom oblúku vytvorenom päťuholníkom musí byť aspoň jeden vrchol sedemuholníka. V opačnom prípade by jeden oblúk sedemuholníka obsahoval tento oblúk päťuholníka, čiže by bol väčší, čo nemôže.

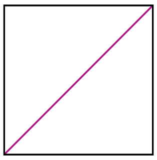
Pre každý oblúk päťuholníka máme stranu tvorenú koncami tohto oblúka. Tým, že na tomto oblúku sa nachádza nejaký vrchol sedemuholníka, tak strana tvorená koncami oblúka pretne strany sedemuholníka v presne dvoch bodoch. Toto bude platiť pre každú stranu päťuholníka, takže päťuholník a sedemuholník sa pretnú v $2 \cdot 5 = 10$ bodoch.

Úloha 19. *Na párty sa stretlo niekoľko ľudí. Niektorí z nich vedeli jazdiť na bicykli a niektorí vedeli šoférovať auto. Auto vedelo šoférovať 30 ľudí na párty. Ľudia, ktorí vedeli šoférovať auto, sa vedeli rozdeliť do pätíc tak, aby v každej pätici boli štyria ľudia, ktorí vedia jazdiť na bicykli. Ľudia, ktorí vedeli jazdiť na bicykli, sa zas vedeli rozdeliť do šestíc tak, aby v každej bol iba jeden človek, ktorý vie šoférovať auto. Koľko ľudí na párty vie jazdiť na bicykli?*

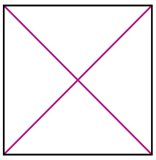
Výsledok: 144
Riešenie: 30 ľudí, ktorí vedeli šoférovať, sa vedelo rozdeliť na pätice tak, aby v každej boli štyria, ktorí vedia jazdiť na bicykli. Týchto pätíc je $30 : 5 = 6$, takže $4 \cdot 6 = 24$ ľudí vie šoférovať auto a aj jazdiť na bicykli. Ľudia, ktorí vedia jazdiť na bicykli sa zas vedeli rozdeliť do šestíc, aby v každej bol presne 1 z tých 24, ktorí vedia aj šoférovať. V týchto šesticiach je preto presne $6 \cdot 24 = 144$ ľudí. To znamená, že na párty vie 144 ľudí jazdiť na bicykli.

Úloha 20. *Domi vie perfektne kresliť a vyfarbovať. Nakreslila si štvorec s uhlopriečkou dlhou 12 cm. Teraz by si chcela pripraviť dosť farby na jeho vyfarbenie. Vie, že na vyfarbenie štvorčeka so stranou dlhou 1 cm potrebuje 1 gram farby. Koľko gramov farby bude Domi potrebovať na vyfarbenie svojho štvorca?*

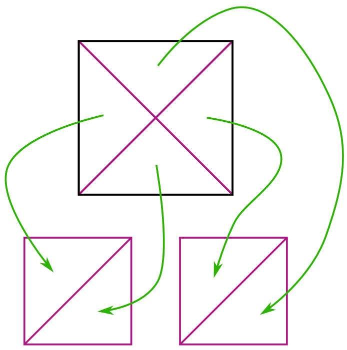
Výsledok: 72
Riešenie: Nakreslime si obrázok štvorca a vyznačme mu uhlopriečku:



Uhlopriečka ho rozdelila na dva trojuholníky. Každý z nich vieme rozdeliť na dva menšie:

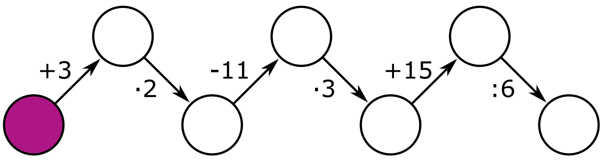


Takto získané 4 trojuholníčky vieme premiestniť a dostať dva menšie štvorce:



Dostali sme tak dva štvorce so stranou dlhou 6 cm. Každý z nich vieme rozdeliť na $6 \cdot 6 = 36$ štvorčekov so stranou dlhou 1 cm. Na jeho vyfarbenie jedného preto Domi potrebuje 36 gramov farby. Pôvodný štvorec tvorili dva takéto štvorčeky, takže na vyfarbenie pôvodného štvorca Domi potrebuje $2 \cdot 36 = 72$ gramov farby.

Úloha 21. *Miška sa pred písomkou rozhodla precvičiť si počtové operácie. Na internete našla cvičenie ako na obrázku. Do fialového políčka napíše nejaké číslo. Potom s číslami vykonáva operácie naznačené pri šípke. Miška toto spravila s číslom 17 a zostala prekvapená, že na konci dostala opäť rovnaké číslo, teda číslo 17. Pre koľko dvojciferných čísel by mohla na konci dostať rovnaké číslo ako to, s ktorým začala?*

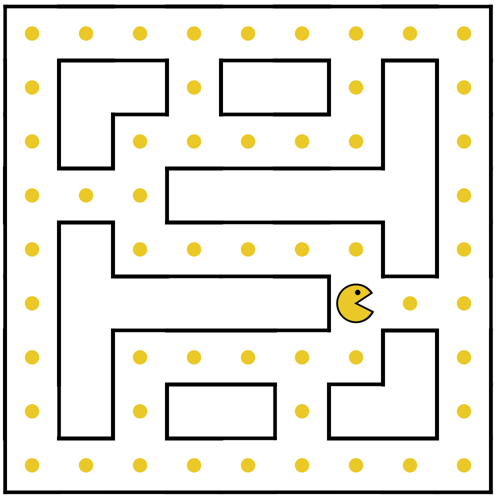


Výsledok: 90
Riešenie: Po troche skúšania prídeme na to, že nám to vychádza pre ľubovoľné číslo. Namiesto čísla 17 si pomyslime nejaké číslo (naše číslo). Najprv k nemu pričítajme 3, dostaneme naše číslo zväčšené o 3. Potom výsledok zdvojnásobme, dostaneme dvojnásobok nášho čísla, no aj dvojnásobne zväčšeného o 3, teda zväčšeného o 6. Ďalej ho zmenšíme o 6, teda nám zostane už iba dvojnásobok nášho čísla. Nakoniec tento dvojnásobok predelíme 2 a dostaneme pôvodné číslo. Tým sme práve ukázali, že pre ľubovoľné číslo skončíme s rovnakým číslom, ako sme začali. Nech teda Miška začne s akýmkoľvek číslom, na konci jej vždy vyjde číslo, s ktorým začala. Všetkých dvojciferných čísel je 90, takže Miške sa to stane pre 90 dvojciferných čísel.

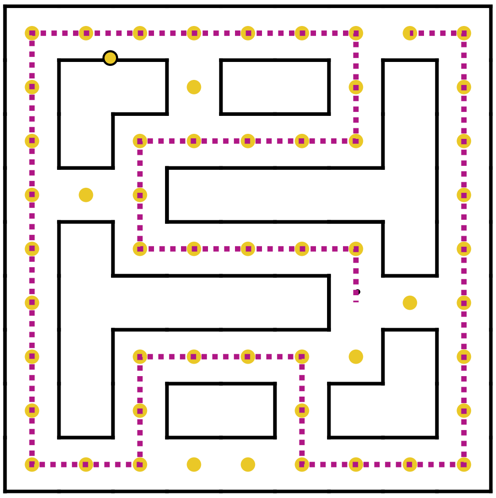
Úloha 22. *Isto poznáš ten pocit, chce sa ti napísať všetky čísla od 1 do 999. Pritom ti určite napadne zistiť, koľkokrát napíšeš cifru 1. Koľkokrát ju teda napíšeš?*

Výsledok: 300
Riešenie: Spočítajme, koľkokrát sa cifra 1 nachádza na jednotlivých pozíciách. Na mieste stoviek sa nachádza 100-krát – v číslach 100 až 199. Všimnime si, že to môžeme formulovať aj tak, že ak vyškrtneme túto jednotku, tak nám zostanú dvojčíslia 00 až 99. Pritom nám nevadí, že napríklad 00 nie je dvojciferné číslo, lebo keď vrátime naspäť vyškrtnutú jednotku, tak dostaneme nejaké číslo medzi 1 a 999. Toto vieme využiť pre cifru 1 na zvyšných pozíciách. Pre cifru 1 na mieste desiatok dostaneme opäť 100 možností, lebo ak túto jednotku vyškrtneme, tak zvyšné cifry môžu tvoriť dvojčíslia od 00 po 99. Rovnako aj pre cifru 1 na mieste jednotiek. Všetkých cifier 1 preto bude $3 \cdot 100 = 300$.

Úloha 23. *Pacman sa opäť raz ocitol v rovnomennej hre. Je na plániku, ktorý vidíš na obrázku. Vydá sa po plániku a vždy, keď príde k žltej bobuľke, tak ju zje. Pacman by chcel prejsť po plániku tak, aby zjedol čo najviac bobuliek. V momente, keď ale príde na miesto, kde bola bobuľka, no už ju zjedol, tak sa zastaví. Rovnako sa zastaví, aj keď sa vráti na miesto, kde začínal. Koľko najviac žltých bobuliek môže Pacman zjesť?*



Výsledok: 48
Riešenie: Ak prejde Pacman po plániku tak ako na nasledujúcom obrázku, zje 48 bobuliek:



Potrebujeme zdôvodniť, že viac bobuliek Pacman zjesť nemohol. Všimnime si, že z každej križovatky vedú 3 cesty. Keď nejakou križovatkou Pacman prejde, tak zostane nejaká cesta, ktorou z danej križovatky nešiel. Tou už nikdy v budúcnosti neprejde. Toto platí pre všetky križovatky okrem tej, pri ktorej sa Pacman zastaví.
Preto ak má Pacman zjesť čo najviac bobuliek, tak potrebuje neprejsť takéto cesty s čo najmenej bobuľkami. Skoro všetky križovatky majú aspoň jednu cestu takú, na ktorej je medzi križovatkami len jedna bobuľka. Toto sú cesty, ktoré chce Pacman neprejsť. Okrem toho sú už len dve križovatky – taká, pri ktorej Pacman skončil na obrázku vyššie, a križovatka presne na opačnej strane plánika. Z nich vedie jedna cesta taká, že má dve bobuľky medzi križovatkami, takže Pacman chce ideálne neprejsť túto cestu. Keďže má možnosť z jednej križovatky prejsť v podstate všetky tri cesty (jednu z ciest takejto križovatky prejde úplne na konci), tak je ideálne, ak pre jednu z týchto dvoch križovatiek neprejde cestu s dvomi bobuľkami a pre druhú križovatku prejde všetky cesty.
Keď všetky tieto pozorovania poskladáme, zistíme, že pre Pacmana je najlepšie prejsť po plániku ako na obrázku vyššie. Takže Pacman zje najviac 48 žltých bobuliek.

Úloha 24. *Lukáš zistil, že existujú iba dva štvorciferné palindrómy, ktoré sú násobkom 56. Jeden z nich je 6776. Akú hodnotu má ten druhý?*

Poznámka: Palindróm je číslo, ktoré sa číta rovnako spredu aj odzadu. Napríklad číslo 12321 je palindróm.

Výsledok: 8008
Riešenie: Skúsme hľadať vyhovujúci palindróm medzi číslami s čo najjednoduchším tvarom. Pritom si všimnime, že číslo 1001 je násobkom 7 a zároveň to je palindróm. Aby sme z neho spravili násobok 56, musíme z neho spraviť ešte násobok 8. To spravíme jednoducho tým, že číslo 1001 vynásobíme 8. Číslo $1001 \cdot 8 = 8008$ je naozaj palindróm, ktorý je násobok 56, a teda ten, ktorý hľadáme.

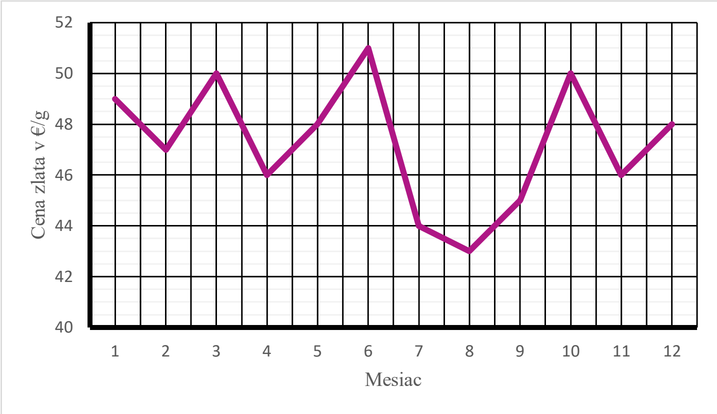
Úloha 25. *V obchode s televízormi predávali televízor za 1600 €. Nikto ho ale nechcel kúpiť, a tak ho zlacnili o štvrtinu. Na tom ale nezarábali, a tak jeho cenu zvýšili o štvrtinu novej ceny. Koľko eur stojí televízor teraz?*

Výsledok: 1500
Riešenie: Pri zľave zlacnel o štvrtinu, čiže zlacnel o 1600 € : 4 = 400 €. Po zľave teda stál 1600 € - 400 € = 1200 €. Potom zdražel o štvrtinu, čiže o 1200 € : 4 = 300 €. Teraz preto stojí 1200 € + 300 € = 1500 €.

Úloha 26. *Paťo si zobral kocku so stranou dlhou 2 cm. Rozhodol sa všetky jej hrany pogumovať, aby neboli moc ostré. Na pogumovanie 1 cm hrany potrebuje použiť 1 gram gumy. Koľko gramov gumy Paťo použije na to, aby pogumoval všetky hrany svojej kocky?*

Výsledok: 24
Riešenie: Keďže na jeden centimeter hrany potrebuje Paťo 1 g gumy, na celú dvojcentimetrovú hranu potrebuje 2 g gumy. Všetkých hrán kocky je 12. Celkovo tak bude Paťo potrebovať $12 \cdot 2$ g = 24 g gumy.

Úloha 27. *Graf na obrázku ukazuje, ako sa v priebehu jednotlivých mesiacov roka vyvíjala cena zlata za jeden gram v eurách. Matúš na základe tohto grafu povedal niekoľko tvrdení:*
1) Cena zlata nikdy nebola vyššia ako 50 € za jeden gram.
10) Najnižšia cena za gram zlata v priebehu tohto roka bola 44 €.
100) Cena zlata v apríli bola najnižšia v dovtedajšej časti roka.
1000) Zlato malo najvyššiu cenu v júni.
Aký je súčet čísel tvrdení, ktoré Matúš povedal správne?



<u>Výsledok:</u> 1100

<u>Riešenie:</u> Postupne prejdime jednotlivé tvrdenia:

1) Toto tvrdenie je nepravdivé. V júni totiž bola cena zlata 51 € za gram.

10) Toto tvrdenie je tiež nepravdivé. Najnižšia cena zlata v priebehu roka bola v auguste, a to 43 € za gram zlata.

100) Toto tvrdenie je pravdivé. V apríli totiž bola cena zlata 46 € za gram, kým dovtedy boli ceny 49 €, 47 € a 50 € za gram. Tie sú naozaj vyššie ako 46 € za gram zlata.

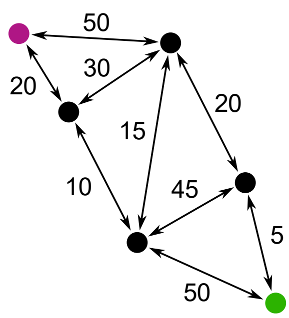
1000) Toto tvrdenie je pravdivé. Zlato malo naozaj najvyššiu hodnotu v júni, a to 51 € za gram zlata. Iba dve tvrdenia sú pravdivé a súčet ich čísel je 100 + 1000 = 1100.

Úloha 28. *Fedor sa hrá s číslami a počíta súčin cifier každého čísla. Minule našiel najmenšie číslo, ktoré má súčin cifier 100. Ktoré číslo Fedor našiel?*

<u>Výsledok:</u> 455

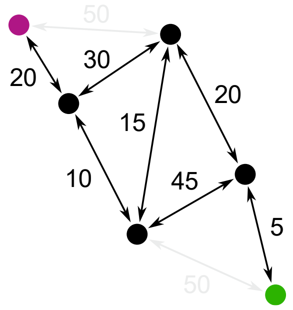
<u>Riešenie:</u> Aby sme našli najmenšie také číslo, tak od cifry na mieste jednotiek píšme čo najväčšie cifry, aby výsledný súčin cifier mohol byť 100. Najväčšia cifra, ktorá má násobok 100, je cifra 5. Napíšme ju na miesto jednotiek. Zvyšné cifry musia mať súčin 100 : 5 = 20. Opäť je najväčšia cifra, ktorá má násobok 20, cifra 5, a tak ju napíšme aj na miesto desiatok. Zvyšné cifry potrebujú mať súčin 20 : 5 = 4. Stačí tak ako poslednú cifru napísať cifru 4. Dostávame tak, že najmenšie číslo so súčinom cifier 100, je číslo 455.

Úloha 29. *V krajine Matbojovo premávajú medzi niektorými mestami obojsmerné vlakové linky. Použitie každej linky je spoplatnené nejakou sumou v eurách. Schému liniek spolu s cenou lístka v eurách vidíš na obrázku. Erik by sa rád dostal zo zeleného mesta do fialového mesta. Koľko najmenej eur zaplatí za túto cestu?*

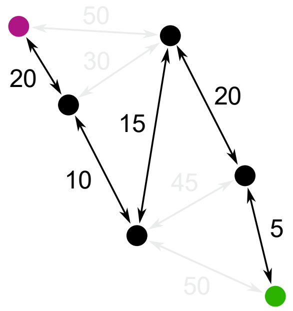


Výsledok: 70

Riešenie: Ak by sme potrebovali prejsť niektorou linkou, ktorá stojí 50 €, vedeli by sme ju obísť po iných linkách a zaplatiť rovnako. Tieto linky tam preto akoby nemusia byť. Z obrázka ich preto vyhoďme:

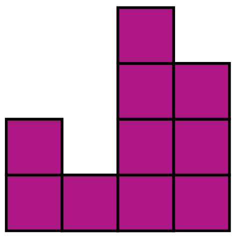


Niečo podobné môžeme spraviť aj s linkami, ktoré stoja 45 € a 30 €. Vieme ich za lacnejšie obísť po iných linkách. Aj tieto dve linky preto vyhoďme z obrázka:



Zostala nám už len jedna možnosť, ako prejsť zo zeleného do fialového mesta. Stáť nás to bude 5 € + 20 € + 15 € + 10 € + 20 € = 70 €.

Úloha 30. *Filip si kúpil veľa rovnakých kociek a začal z nich stavať stavby. Postavil si nejakú stavbu, v ktorej každá kocka stála na zemi alebo na nejakej inej kocke. Túto stavbu odfotil spredu a zhora. Napodiv vyzerala stavba z oboch pohľadov tak ako na obrázku. Filip sa potom rozhodol doplniť celú stavbu na kocku 4 × 4 × 4. Koľko najviac kociek môže potrebovať na doplnenie?*



Výsledok: 48

Riešenie: Kocka 4 × 4 × 4 obsahuje 4 · 4 · 4 = 64 kociek. Aby sme spočítali, koľko najviac kociek treba na doplnenie, potrebujeme spočítať, koľko najmenej kociek je v celej stavbe. Umiestnime najprv kocky na zem tak, aby sme zhora videli požadovaný tvar. Na to použijeme 2 + 1 + 4 + 3 = 10 kociek. Na niektoré ešte potrebujeme pridať kocky tak, aby sme požadovaný tvar videli aj spredu. V najspodnejšej vrstve už máme po jednej kocke, takže pritom potrebujeme navýšiť počet kociek iba o 1 + 0 + 3 + 2 = 6. Spolu tak je v stavbe najmenej 10 + 6 = 16 kociek. Na doplnenie do kocky 4 × 4 × 4 preto Filip potrebuje najviac 64 - 16 = 48 kociek.

Úloha 31. *Lukáš si vymyslel násobiace čísla. Násobiace číslo je také trojciferné číslo, ktorého cifra na mieste stoviek sa rovná súčinu cifier na mieste jednotiek a desiatok. Napríklad 632 je násobiace číslo, pretože 3 · 2 = 6. Lukáš si na papier vypísal všetky násobiace čísla. Koľko čísel si Lukáš vypísal?*

Poznámka: Trojciferné číslo nemôže mať na mieste stoviek cifru 0.

Výsledok: 23
Riešenie: Žiadne násobiace číslo nemôže obsahovať cifru 0. Inak by totiž muselo mať na mieste stoviek cifru 0, čiže by nebolo trojciferné. Skúsme všetky možnosti na cifru na mieste jednotiek. Pre každú z nich prechádzajme možné cifry na mieste desiatok, až kým jej súčin s cifrou na mieste jednotiek nebude aspoň 10. Vtedy už nedostaneme násobiace číslo. Pre jednotlivé cifry na mieste jednotiek tak dostávame tieto násobiace čísla:
1: 111, 221, 331, 441, 551, 661, 771, 881, 991
2: 212, 422, 632, 842
3: 313, 623, 933
4: 414, 824
5: 515
6: 616
7: 717
8: 818
9: 919
Spolu tak máme 9 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 23 násobiacich čísel.

Úloha 32. *Kamarátky Danka a Ninka sa narodili obe v roku 2010. Danka si všimla, že keď vymení čísla označujúce deň a mesiac dátumu svojich narodenín, tak dostane dátum narodenia Ninky. V koľkých rôznych dňoch roku 2010 sa mohla narodiť Ninka?*

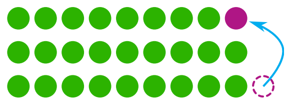
Výsledok: 144
Riešenie: Dankin a Ninkin dátum narodenia majú navzájom vymenené čísla označujúce deň a mesiac narodenia. To je možné, iba ak sú obe tieto čísla niektoré z čísel 1 až 12 – každé z nich totiž aspoň raz vystupuje ako číslo mesiaca. Ninka sa preto narodila v prvých 12 dňoch niektorého z 12 mesiacov, takže sa mohla narodiť v 12 · 12 = 144 rôznych dňoch.

Úloha 33. *Miro si napísal číslo väčšie ako 50 a menšie ako 100. Povedal nám o ňom len to, že je násobkom presne dvoch z týchto štyroch čísel: 4, 6, 12, 27. Aké číslo si Miro napísal?*

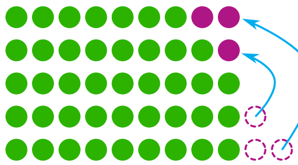
Výsledok: 54
Riešenie: Tri z čísel 4, 6, 12 a 27 sú násobkom čísla 2. Hľadané Mirovo číslo musí byť násobkom aspoň jedného z nich, takže musí byť aj násobkom čísla 2. Podobne je Mirovo číslo násobkom čísla 3, keďže spomedzi čísel 4, 6, 12 a 27 sú tri násobkom čísla 3. Mirovo číslo je preto násobkom 2 · 3 = 6, čo je jedno z čísel, o ktorých nám Miro povedal.
Skúšajme zistiť, ktoré z čísel 4, 12 a 27 bude druhé z čísel, ktorého násobkom je Mirovo číslo. Ak by to bolo číslo 4, tak Mirovo číslo bude násobkom aj čísla 12. Podobne ak by to bolo číslo 12, tak Mirovo číslo bude násobkom čísla 4. Mirovo číslo tak nebude násobkom žiadneho z čísel 4 a 12, musí tak byť násobkom 27.
Len jeden násobok 6 a 27 sa nachádza medzi číslami 50 a 100 – je ním číslo 54. Miro si tak napísal číslo 54.

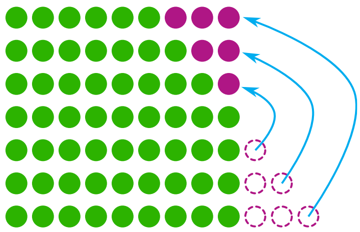
Úloha 34. *Jožko má doma veľa plastových vojačikov. Vie z nich poskladať zaujímavé formácie. Vie ich postaviť do 2 radov tak, že v prvom rade bude o vojačika menej ako v druhom rade. Vie ich tiež postaviť do 3 radov tak, že v prvom rade bude o vojačika menej ako v druhom rade, kde bude o vojačika menej ako v treťom rade. Podobne to vie spraviť aj s 5 a 7 radmi – počty vojačikov sa budú po jednom zväčšovať od prvého radu po posledný. Koľko najmenej vojačikov môže mať Jožko?*

Výsledok: 105
Riešenie: Pozrime sa na rozostavenia s 3, 5 a 7 radmi. Rozostavenie do 3 radov ľahko upravíme tak, aby v každom rade bolo rovnako veľa vojačikov – stačí presunúť jedného vojačika z posledného radu do prvého:



Počet vojačikov preto musí byť násobkom 3. Niečo podobné platí aj v prípade 5 a 7 radov – vieme presunúť vojačikov zo zadnejších radov do prednejších a dostať tak rovnaký počet vojačikov v každom rade:





Počet vojačikov tak musí byť aj násobkom 5, aj násobkom 7.
Počet vojačikov preto musí byť násobkom 3 · 5 · 7 = 105. So 105 vojačikmi navyše vieme splniť aj podmienku s 2 radmi – v prvom rade bude 52 a v druhom 53 vojačikov. Jožko má tak najmenej 105 vojačikov.

Úloha 35. *Milan dostal na narodeniny čokoládu. Tá pozostávala z 36 tabličiek, ktoré boli usporiadané do štvorcovej mriežky 6 × 6. Bolo ich ale potrebné rozlámať. Tak sa Milan začal hrať s čokoládou, začal ju lámať. Zakaždým zobral nejaký kúsok, ktorý ešte držal pokope, a rozlomil ho pozdĺž nejakej čiary pôvodnej štvorcovej mriežky. Koľko najmenej rozlomení bude Milan potrebovať na rozlámanie čokolády na jednotlivé tabličky?*

Výsledok: 35
Riešenie: Vždy, keď Milan rozlomí nejaký kúsok čokolády, vzniknú z neho dva celistvé kúsky. Každé rozlomenie teda zväčšuje počet celistvých kúskov o 1. Na začiatku má Milan 1 kúsok a na konci ich potrebuje 36. Bude preto potrebovať 36 - 1 = 35 rozlomení, a to bez ohľadu na to, ako bude kúsky lámať.

Úloha 36. *Ubytovňa v Tatrách ponúka ubytovanie v mnohých izbách pre 5 a pre 7 ľudí. Do tejto ubytovne prišla partia turistov, ktorí sa chceli ubytovať. V hoteli ich však nedokázali rozdeliť do izieb tak, aby boli všetky izby, v ktorých bude niekto z nich, úplne obsadené. Koľko najviac turistov mohlo prísť?*

Výsledok: 23
Riešenie: Značme si do tabuľky, koľko ľudí vieme ubytovať. Ak nepoužijeme žiadnu 7-miestnu izbu, tak môžeme ubytovať 5, 10, 15, 20, 25, ... ľudí:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

Ak použijeme jednu 7-miestnu izbu, tak vieme ubytovať 7, 12, 17, 22, 27, ... ľudí:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

Ak použijeme dve 7-miestne izby, tak vieme ubytovať 14, 19, 24, 29, ... ľudí:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

Ak použijeme tri 7-miestne izby, tak ubytujeme 21, 26, 31, ... ľudí:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

Ak použijeme štyri 7-miestne izby, podarí sa nám ubytovať 28, 33, 38, ... ľudí:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

Vidíme, že máme celý riadok taký, že daný počet osôb vieme ubytovať. Potom vieme ubytovať aj ľubovoľný väčší počet ľudí – stačí pridávať 5-miestne izby.
Napokon už ľahko prečítame, že najvyšší počet osôb, ktoré nedokážeme ubytovať, je 23.