attomat

13.12.2022

Vzorové riešenia

Kategórie 7, 8, 9, Sekunda, Tercia, Kvarta, Open

p-mat

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

EURÓPSKA ÚNIA

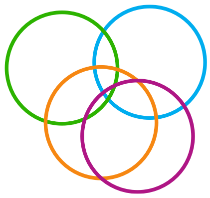
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

Úloha 01. Príprava na vystúpenie

Lucka sa chce na školský cirkus naučiť žonglovať s farebnými krúžkami. Zatiaľ jej to moc nejde, a tak jej krúžky popadali na zem. Ako tak teraz pozerá na krúžky na zemi, napadla jej otázka: Ktorý z krúžkov môže z tejto kôpky zobrať tak, aby sa ostatné krúžky určite nepohli?



Výsledok: fialový
Riešenie: Vidíme, že fialový krúžok nepretína žiaden iný krúžok. Z toho môžeme vydedukovať, že je navrchu. Tým pádom ho vieme zodvihnúť smerom hore bez pohybu iného krúžku.

Úloha 02. Vymyslené problémy

Stano si opakoval písanie čísloviek na diktát. Namiesto toho však vymyslel novú počtovú operáciu. Ak je nad nejakým číslom zelená čiara, tak Stano namiesto tohto čísla napíše počet písmen, ktoré tvoria toto číslo zapísané slovom. Podobne to platí aj ak je čiara nad nejakým výrazom. Nižšie vidíš Stanove výpočty. Stano správne vypočítal prvé dve úlohy. Tú tretiu ale nevie vyriešiť. Aký je výsledok tretej Stanovej úlohy?

$$\overline{7} = 5$$

$$\overline{(3 + 5)} = 4$$

$$20 \cdot \overline{(2 + 2)} - \overline{20} \cdot (2 + 3) = ?$$

Výsledok: 65
Riešenie: Spočítajme výrazy v zátvorkách (2 + 2 = 4 a 2 + 3 = 5) a nahraďme čísla, nad ktorými je zelená čiara, ich počtom písmen. Dostaneme na výpočet úlohu:
$20 \cdot 5 - 7 \cdot 5 = ?$
Výsledok tretej Stanovej úlohy je preto 100 - 35 = 65.

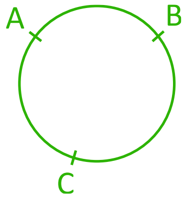
Úloha 03. Zálohujeme

Prednedávnom prišlo na Slovensko zálohovanie plastových fliaš. Pri nákupe je tak potrebné zaplatiť za každú fľašu o 0,15 € navyše, ktoré budú vrátené, keď zákazník prinesie fľašu naspäť do obchodu. Miško si prednedávnom kúpil 20 fliaš vody, pričom za každú zaplatil 1 € vrátane zálohy. Po čase priniesol do obchodu týchto 20 fliaš naspäť a bola mu za ne vrátená záloha. Koľko rovnakých fliaš vody si môže Miško kúpiť za vrátené peniaze, ak cena fľaše vody zostala rovnaká?

Výsledok: 3
Riešenie: Miško si kúpil 20 fliaš, a teda sa mu vráti záloha 20 · 0,15 € = 3 €. Cena jednej fľaše (aj so zálohou) je 1 €, a teda za vrátené peniaze si Miško môže kúpiť 3 € : 1 € = 3 fľaše. Môžeme si všimnúť, že aj keby Miško išiel tieto 3 fľaše vrátiť, bola by mu vrátená záloha 3 · 0,15 € = 0,45 €, a teda na ďalšiu fľašu už nemá peniaze. Za vrátené peniaze si teda Miško môže kúpiť 3 fľaše.

Úloha 04. Vyrysované oblúky

Tete si na papier nakreslila kružnicu s obvodom 30 cm. Na tejto kružnici si vyznačila tri body A, B a C tak, že na kružnici ležali v tomto poradí. Zistila, že kratší z dvojice oblúkov, ktoré spájajú body A a B, má dĺžku 9 cm. Kratší z dvojice oblúkov, ktoré spájajú body B a C, má zas dĺžku 12 cm. Aká je dĺžka kratšieho z oblúkov, ktoré spájajú body A a C, v centimetroch?



Výsledok: 9
Riešenie: Body A, B a C sú na kružnici v tomto poradí. Preto vieme, že kratší oblúk spájajúci body A a B a kratší oblúk spájajúci body B a C tvoria spolu nejaký oblúk spájajúci body A a C. Tento oblúk má dĺžku 9 cm + 12 cm = 21 cm. Je toto ten kratší oblúk, ktorý spája body A a C? Tento oblúk spolu s druhým oblúkom spájajúcim body A a C tvoria spolu celú kružnicu, takže súčet ich dĺžok je obvod kružnice 30 cm. Druhý oblúk spájajúci body A a C má preto dĺžku 30 cm - 21 cm = 9 cm. Oblúky spájajúce body A a C tak majú dĺžky 21 cm a 9 cm, takže kratší z nich má dĺžku 9 cm.

Úloha 05. Okrúhle čísla

Ema má na papier napísane dve trojciferné čísla. Každé z nich zaokrúhlila na stovky, čím dostala dvakrát to isté číslo. Aký najväčší môže byť rozdiel týchto dvoch čísel, pred zaokrúhlením?

Výsledok: 99
Riešenie: Najväčší rozdiel bude vtedy, keď jedno číslo zaokrúhľujeme nahor najviac, ako sa dá, a druhé (s cifrou na mieste stoviek o jedno väčšou) nadol najviac, ako sa dá. Ak je posledné dvojčíslie 50, musíme zaokrúhliť nahor, ak je 49, tak už nadol. V prvom prípade sa číslo zaokrúhlením zväčší o 50, v druhom prípade sa zmenší o 49. Najväčší rozdiel medzi Eminými číslami pred zaokrúhlením je preto 50 + 49 = 99.

Úloha 06. Poradie cifier

Tete sa pri učení do školy nudila, a tak si napísala na papier čísla od 1 do 42. Hneď jej napadlo spočítať, koľkokrát použila ktorú cifru. Zoraď cifry 1, 3, 4 a 6 podľa toho, koľkokrát každú použila. Začni tou cifrou, ktorú Tete použila najviackrát.

Výsledok: 1; 3; 4; 6
Riešenie: Zoradiť cifry podľa toho, koľkokrát bola ktorá použitá, vieme aj bez toho, aby sme spočítali jednotlivé počty. Zdôvodníme, že najviackrát bola použitá cifra 1, potom cifra 3, cifra 4 a napokon cifra 6.
Najprv zdôvodníme, že cifra 1 bola použitá viackrát ako cifra 3. Obe cifry boli použité ako cifra na mieste desiatok pre celú desaticu čísel (10 až 19, resp. 30 až 39). Na mieste jednotiek ale bola cifra 1 použitá viackrát vďaka tomu, že Tete napísala číslo 41, ale číslo 43 už nie. Takže cifra 1 bola použitá viackrát ako cifra 3.
Ďalej bola cifra 3 použitá viackrát ako cifra 4 – na mieste jednotiek boli použité rovnako veľa krát, no na mieste desiatok bola cifra 3 použitá pre celú desiatku (30 až 39), kým cifra 4 nie (iba pre čísla 40, 41 a 42). Takže cifra 3 bola použitá viackrát ako cifra 4.

Napokon z podobného dôvodu bola použitá viackrát cifra 4 ako cifra 6 – na mieste jednotiek boli použité rovnako veľa krát, no na mieste desiatok bola cifra 4 použitá (v číslach 40, 41 a 42), kým cifra 6 nebola použitá na mieste desiatok.
Takže cifra 1 bola použitá viackrát ako cifra 3. Tá zas bola použitá viackrát ako cifra 4, ktorá bola použitá viackrát ako cifra 6. Výsledné poradie je teda 1, 3, 4, 6.

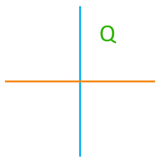
Úloha 07. Náhodný výber

Katka dala do vrecúška osem guľôčok s číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8. Chcela by z vrecúška náhodne vytiahnuť 5 guľôčok. Vtom jej napadlo niekoľko zaujímavostí. Ktoré z nasledujúcich viet sú pravdivé?
a) Medzi vytiahnutými guľôčkami bude určite nejaká s párnym číslom.
b) Súčet čísel na vytiahnutých guľôčkach bude určite väčší, ako keby Katka vytiahla len dve guľôčky.
c) Medzi vytiahnutými guľôčkami budú určite dve guľôčky, ktorých čísla sa líšia o presne 4.
Poznámka: Pozor! Viac odpovedí môže byť správnych!

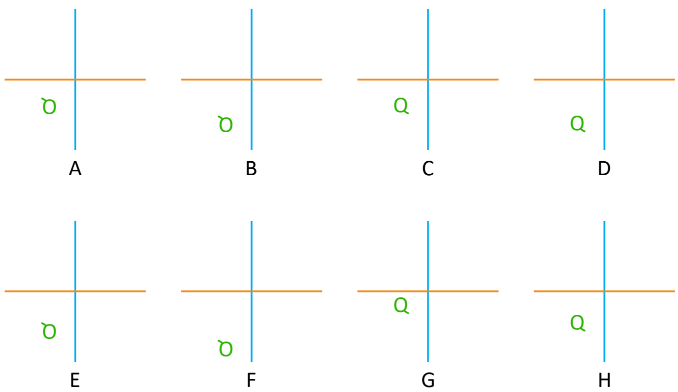
Výsledok: a); c)
Riešenie: Pozrime sa na jednotlivé vety.
a) Môžeme si všimnúť, že vo vrecúšku sa nachádzajú 4 párne a 4 nepárne guľôčky. Keď vytiahneme náhodne 5 guľôčok, najviac 4 z nich môžu byť nepárne, a teda určite je aspoň 1 párna – tvrdenie a) je pravdivé.
b) Najväčší možný súčet na dvoch guľôčkach je 7 + 8 = 15. Najmenší možný súčet na piatich guľôčkach je 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15. To znamená, že môže nastať situácia, keď je toto tvrdenie nepravdivé.
c) Pozrime sa na všetky dvojice guľôčok, v ktorých je rozdiel ich čísel 4. Tieto dvojice sú: 1 a 5, 2 a 6, 3 a 7, 4 a 8 (každá guľôčka z vrecúška má svoju dvojicu). Aby tvrdenie nebolo pravdivé, musela by byť z každej dvojice vytiahnutá najviac jedna guľôčka, a teda dokopy 4 guľôčky. Keďže sme vytiahli 5 guľôčok, musí platiť, že z nejakej z daných dvojíc sme vytiahli obe guľôčky, a teda majú rozdiel 4 – tvrdenie c) je pravdivé.
Takže pravdivé sú tvrdenia a) a c).

Úloha 08. Q

Maťko si na papier nakreslil dve priamky a písmeno Q tak ako na obrázku. Potom písmeno Q zobrazil v osovej súmernosti podľa modrej priamky a potom v osovej súmernosti podľa oranžovej priamky.

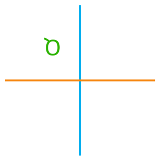


Na ktorom obrázku je správne zakreslené, ako sa písmeno Q zobrazilo?



Výsledok: B

Riešenie: Nazývajme „nožička“ tú čiarku v písmene Q, ktorou sa písmeno Q líši od písmena O. Smerom tejto nožičky zas nazývajme smer, do ktorého táto nožička vystupuje z okrúhlej časti písmena Q. Keď Maťko zobrazí písmeno Q v osovej súmernosti podľa modrej priamky, bude jeho nožička mať smer doľava dole:



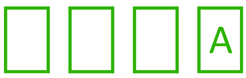
Keď teraz Maťo zobrazí takto upravené písmeno Q v osovej súmernosti podľa oranžovej priamky, bude mať nožička smer doľava hore. Do úvahy tak pripadajú už len možnosti A a B.
Ako ale zistíme, ktorá z možností A a B je správna? Pri osovej súmernosti podľa modrej priamky sa nezmenila vzdialenosť písmena od oranžovej priamky. Rovnako sa nezmenila vzdialenosť písmena Q (resp. jeho obrazu) od oranžovej priamky pri osovej súmernosti podľa oranžovej priamky – akurát je teraz písmeno Q na opačnej strane. V možnosti A je však obraz písmena Q bližšie k oranžovej priamke ako pred zobrazovaním. Preto je obraz písmena Q zobrazený správne na obrázku B.

Úloha 09. Rodinná lyžovačka

Prišla zima, a tak šli súrodenci Alica, Barbora, Carlos a Daniela lyžovať. V lyžiarskom stredisku majú štvorsedačkovú lanovku. Najväčší problém, ktorý potrebujú títo súrodenci vyriešiť, je, ako budú na lanovke sedieť. Majú totiž rôzne požiadavky:
- Alica by chcela sedieť na niektorom kraji.
- Barbora by chcela sedieť hneď vedľa Daniely.
- Carlos by chcel sedieť niekde naľavo od Alice (nie nutne hneď vedľa nej).
- Daniela chce sedieť na pravej polovici lanovky.
Zoraďte týchto súrodencov podľa toho, ako budú sedieť na lanovke. Začnite tým, ktorý bude sedieť úplne vľavo.

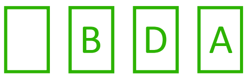
Výsledok: Carlos; Barbora; Daniela; Alica

Namiesto celých mien používajme na obrázkoch len ich začiatočné písmená.
Keby Alica sedela na ľavom kraji, Carlos nemôže sedieť vľavo od nej, a teda Alica musí sedieť na pravom kraji:

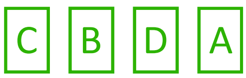


Daniela chce sedieť v pravej polovici, a teda jej zostáva len druhé miesto sprava:

Barbora chce sedieť vedľa Daniely, a to sa dá už len na treťom mieste sprava:



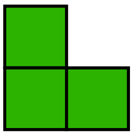
Na posledné miesto si sadne Carlos:



Súrodenci budú na lanovke usadení v poradí Carlos, Barbora, Daniela a Alica.

Úloha 10. Tetris z papiera

Po tom, čo na Matboji hrala tetris, si Viki vystrihla zo zeleného papiera dielik ako na obrázku vľavo. Zároveň si nakreslila tabuľku na obrázku vpravo. Viki by chcela umiestniť dielik na tabuľku tak, aby dielik plne zakryl niektoré políčka tabuľky. Viki potom vypočíta súčet čísel na zakrytých políčkach – toľko bodov získa. Koľko najviac bodov vie Viki získať?



6	2	9
5	8	1
4	7	3

Výsledok: 20
Riešenie: Najprv si musíme uvedomiť, že nám nič nebráni papierik otáčať. Zrejme sa nám oplatí zakryť niektoré z najväčších čísel ako 7, 8 alebo 9. Po troche skúšania by sme našli možnosť na obrázku:

6	2	9
5	8	1
4	7	3

Viki teda vie získať 8 + 7 + 5 = 20 bodov. Väčší súčet dostať nevieme: Aby sme dostali väčší súčet, musel by byť tvorený jednou z trojíc (9, 8, 7), (9, 8, 6), (9, 8, 5), (9, 7, 6), (9, 8, 4), (9, 7, 5) alebo (8, 7, 6). Ani jedna z týchto trojíc však nie je pri sebe. Takže najväčší počet bodov, ktorý vie Viki získať, je 20 bodov.

Úloha 11. Kameň, papier, nožnice

Paťo so Zuzkou hrali hru kameň – papier – nožnice. V každom kole tejto hry obaja ukážu jednu z možností kameň, papier alebo nožnice. Ak ukážu rovnakú možnosť, nastáva remíza. Inak platí nasledovné: kameň poráža nožnice, nožnice porážajú papier, papier poráža kameň.
Pri tejto hre Paťo so Zuzkou odohrali 6 kôl. V nich Paťo ukázal postupne kameň, nožnice, nožnice, kameň, papier, kameň. Napriek Paťovej snahe Zuzka vyhrala viac ako polovicu kôl, a to aj napriek tomu, že ani raz neukázala kameň. Žiadne z kôl sa pritom neskončilo remízou. Koľkokrát Zuzka ukázala nožnice?

Výsledok: 1
Riešenie: Môžeme si všimnúť, že v druhom a treťom kole ukázal Paťo nožnice. Vieme, že Zuzka nikdy neukázala kameň, a teda tieto dve kolá nemohla vyhrať. Taktiež vieme, že žiadne kolo sa neskončilo remízou, a teda v druhom a treťom kole ukázala Zuzka papier. Zostávajú 4 kolá. Aby Zuzka vyhrala viac ako polovicu kôl, musí ich všetky vyhrať. Nožnice mohla ukázať len vtedy, keď Paťo ukázal papier. To nastalo len v šiestom kole. Čiže Zuzka ukázala nožnice iba raz.

Úloha 12. Prepisovanie

Lukáš si do vrcholov štvorca napísal čísla 2, 3, 5 a 7. Rozhodol sa, že bude tieto čísla prepisovať takto: vždy si vyberie najmenšie číslo a prepíše ho na svoj dvojnásobok. Lukáš takto prepísal čísla 10-krát. Aký bol súčin čísel, ktoré boli na konci vo vrcholoch štvorca?

Výsledok: 215040

Riešenie: Na začiatku majú čísla vo vrcholoch štvorca súčin $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Keď prepíšeme nejaké z čísel vo vrcholoch na dvojnásobok, pribudne do ich spoločného súčinu dvojka, a teda celkový súčin čísel vo vrcholoch sa zdvojnásobí. Tento proces sme zopakovali 10-krát (nezáleží na tom, ktoré konkrétne číslo sme prepísali na dvojnásobok). Teda pribudlo 10 dvojok v celkovom súčine, takže celkový súčin na konci bude $210 \cdot 2^{10} = 210 \cdot 1024 = 215040$.

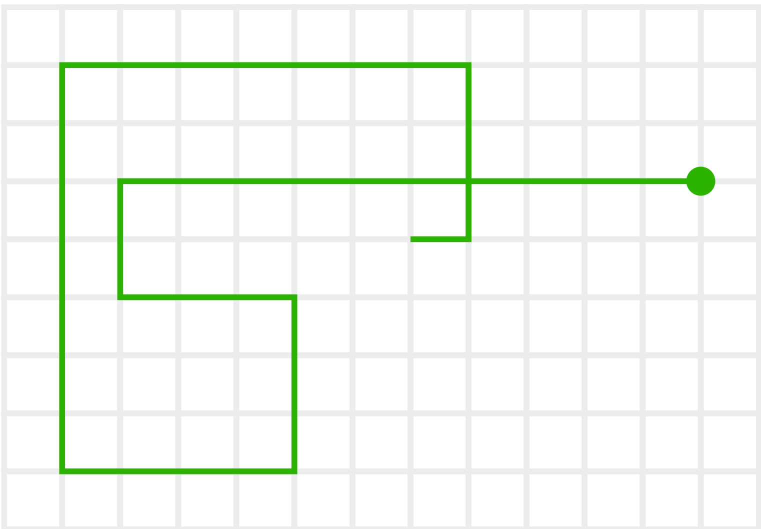
Poznámka: Zápis 2^{10} znamená, že dvojku vynásobíme 10-krát samú sebou, teda $2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$.

Úloha 13. Chodenie do kruhu

Anička sa stratila. Po chvíli blúdenia si Anička uvedomila, že má v mobile GPS, a tak sa našla. Kým ale blúdila, tak GPS zaznamenávala Aničkin pohyb. Od začiatku Aničkinho blúdenia zaznamenala aplikácia takýto pohyb: Najprv prešla Anička 100 m na západ, potom 20 m na juh. Ďalej pokračovala 30 m na východ a ďalších 30 m na juh. Potom sa Anička otočila opäť na západ a prešla 40 m na západ a 70 m na sever. Následne Anička pokračovala 70 m na východ, 30 m na juh a napokon posledných 10 m na západ. V tomto momente si Anička uvedomila, že má GPS. Počas blúdenia Anička prešla raz miestom, ktorým už predtým prešla. Koľko metrov je toto miesto vzdialené od miesta, kde Anička začala blúdiť?

Výsledok: 40

Riešenie: Nakreslime si trasu, ktorú Anička prešla, na štvorčekovú sieť. Jednotlivé Aničkine vzdialenosti sú násobky 10 m, a tak si zvoľme, že veľkosť štvorčeka tejto siete bude 10 m. Po nakreslení dostávame takýto obrázok:



Na ňom vidíme, že vzdialenosť miesta, ktorým Anička prešla dvakrát, od miesta, kde Anička začala blúdiť, je rovnaká ako 4 dĺžky strán štvorčeka. Miesto, ktorým Anička prešla dvakrát je tak vzdialené $4 \cdot 10$ m = 40 m od miesta, kde Anička začala blúdiť.

Úloha 14. Zaplatenina

Nina má v peňaženke rôzne bankovky a mince. Konkrétne má dve bankovky s hodnotou 20 €, jednu bankovku s hodnotou 10 €, dve bankovky s hodnotou 5 €, tri mince s hodnotou 1 €, štyri mince s hodnotou 0,20 €, jednu mincu s hodnotou 0,10 € a tri mince s hodnotou 0,05 €. V obchode má Nina zaplatiť sumu 53 €. Koľkými spôsobmi to môže Nina spraviť tak, aby jej predavač nemusel vydať?

Výsledok: 4
Riešenie: Namiesto hľadania spôsobov, ako mohla Nina zaplatiť, hľadajme rôzne možnosti toho, aké bankovky a mince zostali Nine v peňaženke. Pred platením má Nina peniaze v hodnote $2 \cdot 20$ € + $1 \cdot 10$ € + $2 \cdot 5$ € + $3 \cdot 1$ € + $4 \cdot 0{,}20$ € + $1 \cdot 0{,}10$ € + $3 \cdot 0{,}05$ € = 64,05 €. Po zaplatení tak Nine zostanú peniaze v hodnote 64,05 € - 53 € = 11,05 €.

Keďže Nine zostane 11,05 €, takže jej nezostane žiadna bankovka s hodnotou 20 €. Všimnime si, že všetky mince majú spolu hodnotu $3 \cdot 1$ € + $4 \cdot 0{,}20$ € + $1 \cdot 0{,}10$ € + $3 \cdot 0{,}05$ € = 4,05 €. Mincami tak nevieme nahradiť žiadnu bankovku. Zo sumy 11,05 € preto Nine zostane 10 € v bankovkách a 1,05 € v minciach. Suma 10 € vie Nine zostať v bankovkách dvomi spôsobmi: 10 € alebo 5 € + 5 €. Podobne aj suma 1,05 € vieme Nine zostať v minciach dvomi spôsobmi: 1 € + 0,05 € alebo 0,20 € + 0,20 € + 0,20 € + 0,20 € + 0,10 € + 0,05 € + 0,05 € + 0,05 €.

Nine vie preto zostať suma 11,05 € presne $2 \cdot 2 = 4$ spôsobmi. Takže aj sumu 53 € vie Nina zaplatiť 4 spôsobmi.

Úloha 15. Matematické znamienko

Tomáš si na papier napísal postupne čísla 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Medzi ne nakreslil obdĺžničky tak ako na obrázku. Teraz chcel Tomáš doplniť do jedného z obdĺžničkov znamienko „=“ a do zvyšných obdĺžničkov znamienka „+“ a „-“ tak, aby bola výsledná rovnosť splnená. Vie Tomáš doplniť znamienka tak, aby bola splnená rovnosť?

$$1\ \square\ 2\ \square\ 3\ \square\ 4\ \square\ 5\ \square\ 6$$

Výsledok: nie
Riešenie: Pozerajme sa na nepárne čísla. Kamkoľvek Tomáš napíše znamienko „=“, na jednej strane bude párny počet nepárnych čísel a na druhej strane nepárny počet nepárnych čísel. Bez ohľadu na to, ako potom Tomáš napíše znamienka „+“ a „-“, dostane na strane s párnym počtom nepárnych čísel párne číslo, kým na druhej strane (s nepárnym počtom nepárnych čísel) dostane nepárne číslo. Párne a nepárne číslo sa nikdy nebudú rovnať, takže nikdy nebude splnená rovnosť. Preto Tomáš nevie napísať znamienka tak, aby bola splnená rovnosť.

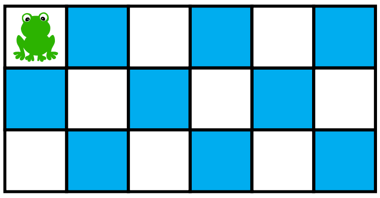
Úloha 16. Rodinná oslava

Na rodinnej oslave sa babka pýtala svojich vnúčat Alice, Barbory, Carlosa a Daniely, koľko majú rokov. Od vnúčat sa však dozvedela iba samé zvláštne veci. Napríklad tieto: Aritmetický priemer vekov Alice a Barbory je 12 rokov. Aritmetický priemer vekov Barbory a Carlosa je 14 rokov. Aritmetický priemer vekov Carlosa a Daniely je 8 rokov. Aký je aritmetický priemer vekov Alice a Daniely?

Výsledok: 6
Riešenie: Aritmetický priemer vekov Alice a Barbory je 12 rokov, takže súčet ich vekov je $2 \cdot 12 = 24$ rokov. Podobne je súčet vekov Barbory a Carlosa $2 \cdot 14 = 28$ rokov a súčet vekov Carlosa a Daniely je $2 \cdot 8 = 16$ rokov. Spočítajme súčet vekov všetkých súrodencov. Dostaneme ho napríklad tak, že spočítame súčet vekov Alice a Barbory a súčet vekov Carlosa a Daniely. Všetci súrodenci tak majú spolu $24 + 16 = 40$ rokov. Tento súčet vekov by sme vedeli dostať tiež tým, že by sme sčítali súčet vekov Alice a Daniely so súčtom vekov Barbory a Carlosa. Vďaka tomu vieme, že súčet vekov Alice a Daniely je $40 - 28 = 12$ rokov. Takže priemer vekov Alice a Daniely je $12 : 2 = 6$ rokov.

Úloha 17. Žaba skoč

Žaba sa ocitla na šachovnici 3 × 6 ako na obrázku. Teraz začne po nej skákať. Skákať bude tak, že bude striedať skok o dve políčka a skok o jedno políčko. Začne skokom o dve políčka. Vie žaba skákať tak, aby každé políčko šachovnice navštívila presne raz (políčko, na ktorom začína, navštívila na začiatku)?



Výsledok: nie
Riešenie: Pozerajme sa na farby políčok, na ktoré žaba skáče. Keď žaba skáče o dve políčka, skočí na políčko rovnakej farby, ako to, na ktorom stála. Keď však skočí iba o jedno políčko, skočí na políčko inej farby. Keď teda bude žaba skákať, tak bude postupne na políčkach takýchto farieb: biela (na začiatku), biela, modrá, modrá, biela, biela, modrá, ... Vždy sa budú striedať dve biele a dve modré políčka.
Po všetkých skokoch má mať žaba 18 navštívených políčok, takže medzi nimi bude 9 dvojíc políčok rovnakej farby. Lenže v takom prípade žaba navštívi 5 dvojíc bielych políčok a 4 dvojice modrých políčok, čiže žaba navštívi 10 bielych a 8 modrých políčok. Lenže na plániku je 9 bielych a 9 modrých políčok. Takže žaba nevie skákať po políčkach tak, aby navštívila každé políčko presne raz.

Úloha 18. Tisíc a jedna guľôčka

Maťko a Kubko sa hrajú takúto hru. Majú 1000 guľôčok očíslovaných číslami 1, 2, 3, ..., 1000. Kubko si potom vyberie jednu z týchto guľôčok. Cieľom Maťka je uhádnuť, ktorú guľôčku si Kubko vybral. Maťko ale môže spraviť len to, že rozdelí guľôčky na dve ľubovoľne veľké kôpky. Keď to spraví, Kubko povie Maťkovi, na ktorej kôpke bola jeho guľôčka. Potom Maťko znova rozdelí všetky guľôčky na dve kôpky, Kubko znova povie, na ktorej kôpke je jeho guľôčka, a takto pokračujú ďalej. Najmenej koľkokrát musí Maťko rozdeliť guľôčky na kôpky, aby s istotou vedel povedať, ktorú guľôčku si Kubko vybral?

Výsledok: 10
Riešenie: Keď Kubko povie, na ktorej kôpke je jeho vybraná guľôčka, tak Maťko môže odložiť na bok všetky guľôčky kôpky, na ktorej nie je Kubkova guľôčka. Nemá totiž zmysel ich dávať na kôpky v ďalších deleniach, keďže o nich už vieme, že medzi nimi nie je Kubkova guľôčka. Pri takomto zmýšľaní vieme ľahko popísať, kedy bude Maťko s istotou vedieť povedať, ktorá guľôčka je tá Kubkova. Bude to vedieť povedať vtedy, keď rozdelí guľôčky na kôpky a Kubko mu povie, že jeho guľôčka je na tej kôpke s jednou guľôčkou. Do tohto stavu sa tak chce Maťko dostať po čo najmenšom počte delení guľôčok na kôpky. Keď Maťko nejako rozdelí guľôčky na kôpky, tak najhoršia situácia pre neho je, že Kubko mu povie, že guľôčka je na tej väčšej z nich (keď popisujeme najhoršiu situáciu pre Maťka, tak môžeme dovoliť Kubkovi mierne podvádzať – dovolíme mu vyberať vždy tú väčšiu kôpku s tým, že jeho vybratá guľôčka bude tá, ktorá na konci zostane). Preto bude musieť Maťko deliť guľôčky na kôpky s rovnakým počtom guľôčok, prípadne s počtom guľôčok líšiacim sa o jednu guľôčku. Celá hra tak prebehne takto:
1. delenie: Maťko rozdelí 1000 guľôčok na kôpky s 500 a 500 guľôčkami, Kubko mu povie, že jeho guľôčka je na kôpke s 500 guľôčkami.
2. delenie: Maťko rozdelí 500 guľôčok na kôpky s 250 a 250 guľôčkami, Kubko mu povie, že jeho guľôčka je na kôpke s 250 guľôčkami.
3. delenie: Maťko rozdelí 250 guľôčok na kôpky so 125 a 125 guľôčkami, Kubko mu povie, že jeho guľôčka je na kôpke so 125 guľôčkami.

4. delenie: Maťko rozdelí 125 guľôčok na kôpky s 62 a 63 guľôčkami, Kubko mu povie, že jeho guľôčka je na kôpke s 63 guľôčkami.
5. delenie: Maťko rozdelí 63 guľôčok na kôpky s 31 a 32 guľôčkami, Kubko mu povie, že jeho guľôčka je na kôpke s 32 guľôčkami.
6. delenie: Maťko rozdelí 32 guľôčok na kôpky so 16 a 16 guľôčkami, Kubko mu povie, že jeho guľôčka je na kôpke so 16 guľôčkami.
7. delenie: Maťko rozdelí 16 guľôčok na kôpky s 8 a 8 guľôčkami, Kubko mu povie, že jeho guľôčka je na kôpke s 8 guľôčkami.
8. delenie: Maťko rozdelí 8 guľôčok na kôpky so 4 a 4 guľôčkami, Kubko mu povie, že jeho guľôčka je na kôpke so 4 guľôčkami.
9. delenie: Maťko rozdelí 4 guľôčky na kôpky s 2 a 2 guľôčkami, Kubko mu povie, že jeho guľôčka je na kôpke s 2 guľôčkami.
10. delenie: Maťko rozdelí 2 guľôčky na kôpky s 1 a 1 guľôčkou, Kubko mu povie, ktorá jeho vybraná guľôčka.
Takže Maťko bude vedieť s istotou povedať, ktorú guľôčku si Kubko vybral, až po 10 deleniach guľôčok na kôpky.

Úloha 19. Faktoriál

Majo sa nudil, a tak vynásobil všetky čísla od 1 do 100. Potom sa pozrel na svoj výsledok a napísal ho ako súčin prvočísel. Koľko prvočísel sa celkovo nachádzalo v súčine, ktorý Majo dostal? Napríklad v súčine čísel od 1 do 6, čiže v súčine $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, sa nachádza celkovo 7 prvočísel.
a) 25
b) 100
c) 239
d) 512
e) 1376
f) 2877

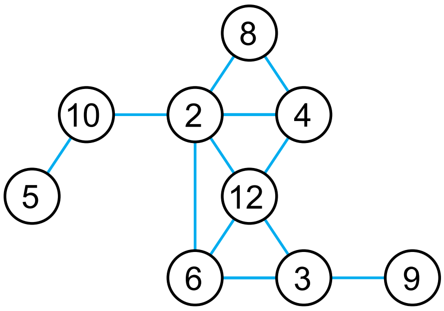
Výsledok: c) 239
Riešenie: Zamyslime sa, ktoré z ponúkaných odpovedí dávajú zmysel. V súčine čísel od 1 do 100 je 100 čísel. Každé z nich (okrem čísla 1) má vo svojom prvočíselnom rozklade aspoň jedno prvočíslo, mnohé z nich aj viacero. Prvočísel v Majovom súčine tak bude určite viac ako 100.
Na druhej strane čísla od 1 do 100 nemajú vo svojom prvočíselnom rozklade mnoho prvočísel. Najviac prvočísel majú čísla 64 a 96, ktoré obsahujú 6 prvočísel. Všetky ostatné čísla majú vo svojom prvočíselnom rozklade najviac 5 prvočísel, mnohé z nich menej ako 5 prvočísel. Čísla od 1 do 100 tak budú mať vo svojom prvočíselnom rozklade priemerne menej ako 5 prvočísel, teda v ich súčine bude určite menej ako 500 prvočísel.
Tieto odhady nám z ponúkaných možností dávajú jedinú možnosť. V Majovom súčine je celkovo c) 239 prvočísel.

Úloha 20. Poštár Pat delí darčeky

Poštár Pat doručuje zásielky na istej ulici. Na tejto ulici sú domy s číslami 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12. Každý dom chce navštíviť práve raz. Avšak chce ich navštíviť tak, aby pre každé dva domy, ktoré navštívi bezprostredne za sebou, platilo, že číslo jedného z nich je deliteľom toho druhého. Zoraď domy podľa toho, v akom poradí ich má Pat navštevovať, aby každý dom navštívil práve raz. Uveďte ľubovoľnú z možností.

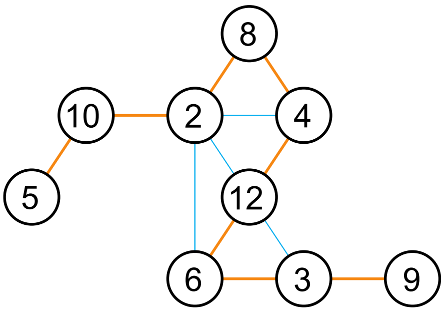
Výsledok: 5; 10; 2; 8; 4; 12; 6; 3; 9 alebo naopak

Riešenie: Nakreslime si obrázok, kde jednotlivé domy (reprezentované krúžkami s číslom) spojíme, ak ich môže Pat navštíviť za sebou:



Vidíme, že čísla 5 a 9 majú len po jednom možnom susedovi. Preto musia byť buď na začiatku, alebo na konci navštevovania domov. Pozrime sa na to z konca, na ktorom je dom číslo 5. Za ním teda nasleduje dom číslo 10. Keďže 10 má len dvoch možných susedov, musí ďalej nasledovať dom číslo 2. Následne musíme navštíviť dom číslo 8, lebo ak by sme ho nenavštívili, zostal by domu číslo 8 iba jeden sused. Tým by sme mali tretí dom, v ktorom by sme museli začať alebo skončiť. Po dome číslo 8 musí nasledovať dom číslo 4. Z domu číslo 4 máme už len jedinú možnosť, a to dom číslo 12. Odtiaľto musíme pokračovať k domu číslo 6, leboináč by nastal podobný prípad, ako keď sme museli navštíviť dom číslo 8. Po dome číslo 6 máme jedinú možnosť pokračovať k domu číslo 3 a stade nám zostáva už iba prísť na koniec k domu číslo 9.

Takže musíme navštíviť domy v poradí ako na obrázku:



Máme dve možnosti, kde začať – v dome číslo 5 alebo v dome číslo 9. Dostávame tak dve možnosti, ako môže Pat prejsť:

5 → 10 → 2 → 8 → 4 → 12 → 6 → 3 → 9

9 → 3 → 6 → 12 → 4 → 8 → 2 → 10 → 5