attomat

26.09.2023

Vzorové riešenia

Kategórie 7, 8, 9, Sekunda, Tercia, Kvarta, Open

p-mat

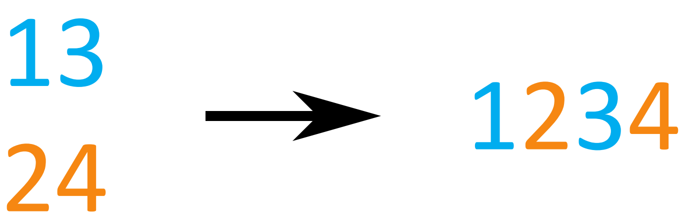
Úloha 01. Presná Terka

Terka bola dnes ráno v obchode. Platila 3,45 €. Chcela, aby jej samoobslužná pokladňa nemusela vydávať. Preto jej zaplatila presne. Koľko najmenej mincí pri tom použila?

Výsledok: 5
Riešenie: Postupne pridávajme na akúsi kôpku mincí vždy mincu s najväčšou hodnotou, ktorej pridaním neprestrelíme sumu na zaplatenie.
Najprv pridajme mincu s hodnotou 2 €, na zaplatenie zostáva 3,45 € - 2 € = 1,45 €.
Ďalej pridajme mincu s hodnotou 1 €, na zaplatenie zostáva 1,45 € - 1 € = 0,45 €.
Ďalej pridajme mincu s hodnotou 0,20 €, na zaplatenie zostáva 0,45 € - 0,20 € = 0,25 €.
Ďalej pridajme mincu s hodnotou 0,20 €, na zaplatenie zostáva 0,25 € - 0,20 € = 0,05 €.
Napokon pridajme mincu s hodnotou 0,05 €, na zaplatenie zostáva 0,05 € - 0,05 € = 0 €.
Terka tak použije 5 mincí.

Úloha 02. Mlynček na čísla

Paťo vyhrabal doma starý mlynček na čísla. Keď doň Paťo postupne vloží dve dvojciferné čísla, tak mlynček z nich vytvorí štvorciferné číslo nasledovne:
– Prvá cifra výsledného čísla je rovnaká ako cifra na mieste desiatok v prvom vloženom čísle.
– Druhá cifra výsledného čísla je rovnaká ako cifra na mieste desiatok v druhom vloženom čísle.
– Tretia cifra výsledného čísla je rovnaká ako cifra na mieste jednotiek v prvom vloženom čísle.
– Posledná cifra výsledného čísla je rovnaká ako cifra na mieste jednotiek v druhom vloženom čísle. Teda napríklad keď Paťo do mlynčeka vloží postupne čísla 13 a 24, tak z mlynčeka vyjde číslo 1234. Paťo je teraz smutný, že niektoré štvorciferné čísla z mlynčeka nikdy nemôžu vyjsť. Ktoré z týchto čísel z mlynčeka nikdy nevyjde?

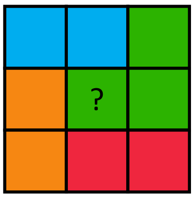


a) 2580 *b) 5015* *c) 8194* *d) 4201*

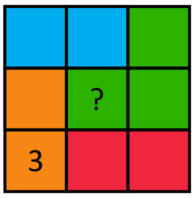
Výsledok: b) 5015
Riešenie: Ku každej z možností si zapíšme, z akých dvojciferných čísel by takéto číslo vzniklo:
a) 2580 vznikne z 28 a 50.
b) 5015 vznikne z 51 a 05.
c) 8194 vznikne z 89 a 14.
d) 4201 vznikne z 40 a 21.
Problém nastáva v možnosti b), kde potrebujeme použiť dvojciferné číslo 05, čo ale nie je dvojciferné číslo. Preto z mlynčeka nikdy nevyjde číslo b) 5015.

Úloha 03. Iné sudoku

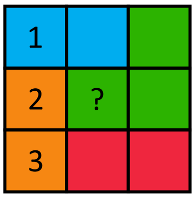
Tomáš našiel v novinách hlavolam. Do tabuľky 3 × 3 treba vpísať čísla 1, 2, 3 tak, aby v každom riadku a aj každom stĺpci bolo každé z týchto čísel presne raz. Zároveň má platiť:
– Súčet čísel v červených políčkach je 3.
– Súčet čísel v modrých políčkach je 4.
– Súčet čísel v oranžových políčkach je 5.
– Súčet čísel v zelených políčkach je 6.
Aké číslo sa nachádza v políčku s otáznikom?



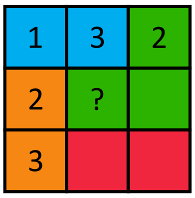
Výsledok: 1
Riešenie: Súčet 3 v červených políčkach vieme dostať len použitím čísel 1 a 2. Síce nevieme, v akom poradí tam budú, ale keďže červené políčka sú v jednom riadku, tak zostávajúce číslo v tomto riadku musí byť 3:



Tým pádom vieme doplniť, že v druhom oranžovom políčku je číslo 5 - 3 = 2 a v prvom stĺpci doplniť chýbajúce číslo 1:



Tentoraz vieme doplniť druhé modré políčko, kde musí byť číslo 4 - 1 = 3, a opäť doplniť chýbajúce číslo 2 v prvom riadku:



Teraz sa vieme vrátiť k červeným políčkam – keďže v poslednom stĺpci už je číslo 2, tak spomedzi červených políčok musí byť číslo dva v tom viac vľavo. V tom viac vpravo bude číslo 1:

1	3	2
2	?	
3	2	1

Napokon už jednoducho doplníme zostávajúce políčka:

1	3	2
2	1	3
3	2	1

Dostávame, že v políčku s otáznikom je číslo 1.

Úloha 04. Pokro(ko)vý hráč

Palo sa hrá s balíčkom kariet. Ten obsahuje 52 kariet – 13 v každej z farieb ♥, ♦, ♠ a ♣. Palo zobral celý balíček a poriadne ho zamiešal. Potom otočil prvých 14 kariet. Medzi nimi bolo 5 kariet vo farbe ♥, 3 karty vo farbe ♦, 2 karty vo farbe ♠ a 4 karty vo farbe ♣. Teraz otočí ešte jednu kartu. Akej farby bude táto karta s najväčšou pravdepodobnosťou?

<u>Výsledok:</u> ♠
<u>Riešenie:</u> Najväčšiu pravdepodobnosť na to byť ďalšou farbou karty má tá farba, ktorej v balíčku zostáva najviac. Z údajov, ktoré máme, vieme, že v balíčku je ešte 13 - 5 = 8 kariet farby ♥, 13 - 3 = 10 kariet farby ♦, 13 - 2 = 11 kariet farby ♠ a 13 - 4 = 9 kariet farby ♣. Najviac ich teda zostáva vo farbe ♠, čiže najpravdepodobnejšia farba nasledujúcej karty je ♠.

Úloha 05. Kocka hádže kockou

Marcel sa hral s hracou kockou, na ktorej môžu padnúť čísla 1 až 6. Hodil ňou 10-krát. Potom spočítal priemer čísel, ktoré mu padli na kocke, a dostal číslo 5,6. Koľkokrát Marcelovi padlo číslo 1?

<u>Výsledok:</u> 0
<u>Riešenie:</u> Keď na 10 hodoch dosiahneme priemer 5,6, tak súčet všetkých hodov musel byť 10 · 5,6 = 56. Hodiť 56 na 10 hodov je dosť ťažké. Muselo pri tom padnú veľa veľkých čísel, ideálne veľa šestiek (ak padne šestka na všetkých 10 hodov, tak dostaneme súčet 10 · 6 = 60). Preto by nám mohla napadnúť otázka, či vôbec mohla padnúť nejaká jednotka. Skúsme, či mohla padnú presne raz. V takom prípade, ak by aj na všetky ostatné hody padla šestka, tak dostaneme súčet iba 1 + 9 · 6 = 55, čo je menej ako 56. Ak padne viac jednotiek, tak bude súčet ešte menší. Tým prichádzam k záveru, že Marcelovi nepadla jednotka ani raz.

Úloha 06. Bárter

Ideme variť koláč. Na výrobu koláča potrebujeme 5 surovín – maslo, vajcia, mlieko, múku, kakao. Doma máme len mlieko a kakao. Máme však skvelých susedov, ktorí nám ponúkli štedré výmenné obchody:
– Alex nám ponúkol, že za kakao nám dá banány a múku.
– Barborka nám za maslo dá kakao a vajcia.
– Cecília nám za banány dá vajcia a múku.
– Dávid nám za múku dá maslo a kakao.
Vďaka obchodom s tromi susedmi sme boli schopní mať všetky potrebné suroviny. S ktorým zo susedov sme nič nevymieňali?

Výsledok: Barborka
Riešenie: Na začiatku máme len mlieko a kakao. S nimi vieme obchodovať iba s Alexom. Po tejto výmene máme mlieko, banány a múku. S banánmi nemáme nič čo robiť, iba ich dať Cecílii, tak to hneď spravme. V tomto momente máme mlieko, vajcia a 2 múky. Čiže máme viac múky, ako potrebujeme, tak jednu z nich vymeňme u Dávida. Teraz máme mlieko, vajcia, múku, maslo a kakao, čo sú presne suroviny, ktoré potrebujeme. Preto sme nič nevymieňali s Barborkou.

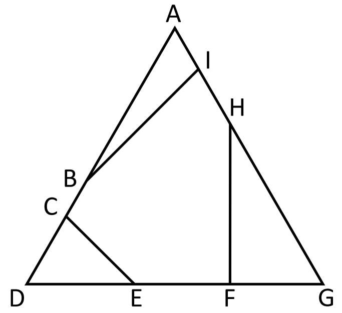
Úloha 07. Tá od umelej inteligencie

Autorský kolektív Attomatu kráča s dobou, a tak sme si nechali vygenerovať úlohu do Attomatu pomocou umelej inteligencie. Toto nám dala:
„Minule som sa rozprávala s programátorom. Mali sme rozhovor, v ktorom niekto z nás hovoril pravdu a niekto klamal.
Programátor povedal: ‚Ja hovorím pravdu.‘
Na to som mu odvetila: ‚Obaja hovoríme pravdu.‘
Povedzte, či som v tomto rozhovore hovorila pravdu, alebo som klamala.“
Zodpovedajte aj vy úlohu od umelej inteligencie.

Výsledok: klamala
Riešenie: Vieme, že niekto klame a niekto hovorí pravdu. Preto musí byť veta „Obaja hovoríme pravdu,“ určite nepravdivá. Takže umelá inteligencia v rozhovore klamala.

Úloha 08. Problémy s obvodmi

Miška si na papier nakreslila trojuholník a v ňom niekoľko čiar tak ako na obrázku. Potom začala porovnávať útvary podľa ich obvodu. Zoraďte útvary päťuholník ACEFH, trojuholník ADG, šesťuholník BCEFHI a štvoruholník ACEG podľa obvodu. Začnite s tým, ktorý má najmenší obvod.



Výsledok: šesťuholník BCEFHI; päťuholník ACEFH; štvoruholník ACEG; trojuholník ADG
Riešenie: Postupne niekoľkokrát použijeme trojuholníkovú nerovnosť – teda že v každom trojuholníku je dĺžka ľubovoľnej strany väčšia ako súčet dĺžok zvyšných dvoch.
Začnime s trojuholníkom ADG. Keď v jeho obvode nahradíme úsečky CD a DE úsečkou CE, tak sa veľkosť obvodu zmenší (podľa trojuholníkovej nerovnosti je totiž úsečka CE kratšia ako súčet dĺžok úsečiek CD a DE). Preto je obvod trojuholníka ADG väčší ako obvod štvoruholníka ACEG.
Podobne sa obvod zmenší aj keď nahradíme úsečky FG a GH úsečkou FH. Tým dostávame, že obvod trojuholníka ADG je väčší ako obvod päťuholníka ACEFH.
Keď ešte raz spravíme nahradenie a úsečky AB a AI nahradíme úsečkou BI, dostaneme, že obvod päťuholníka ACEFH je väčší ako obvod šesťuholníka BCEFHI.
Zostáva už len správne zoradiť útvary od toho s najmenším obvodom a dostaneme správne poradie: šesťuholník BCEFHI; päťuholník ACEFH; štvoruholník ACEG; trojuholník ADG.

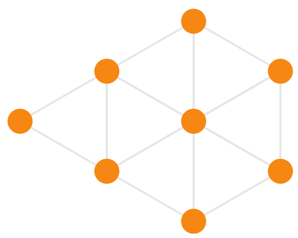
Úloha 09. ZaokrúhleNina

Maťo a Nina majú každý svoje obľúbené dvojciferné číslo. Vedia, že keď Maťo svoje obľúbené číslo zaokrúhli na desiatky, dostane Ninino obľúbené číslo. Keď navzájom vynásobia svoje obľúbené čísla, dostanú číslo 340. Aké je Maťovo obľúbené číslo?

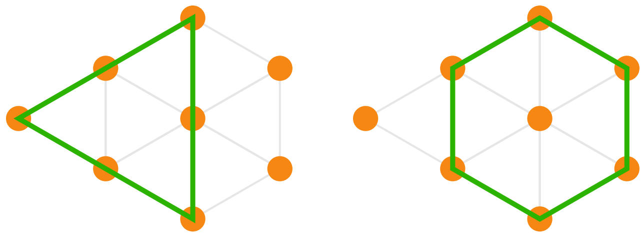
Výsledok: 17
Riešenie: Ninino obľúbené číslo je výsledkom zaokrúhľovania na desiatky, takže sa musí končiť nulou. Do úvahy tak prichádzajú len čísla 10, 20, 30, atď. Keby bolo Ninino obľúbené číslo 30 alebo väčšie, tak Maťovo obľúbené číslo by muselo byť aspoň 25. Lenže $25 \cdot 30 = 750$, čo je výrazne viac ako požadovaných 340. Podobne, keby bolo Ninino obľúbené číslo 10, tak Maťovo obľúbené číslo by bolo najviac 14. Tentoraz by bol súčin ich obľúbených čísel príliš malý – najviac $14 \cdot 10 = 140$. Takže Ninino obľúbené číslo musí byť 20, z čoho jednoducho dopočítame, že Maťovo obľúbené číslo je $340 : 20 = 17$.

Úloha 10. Pravidelný tréning

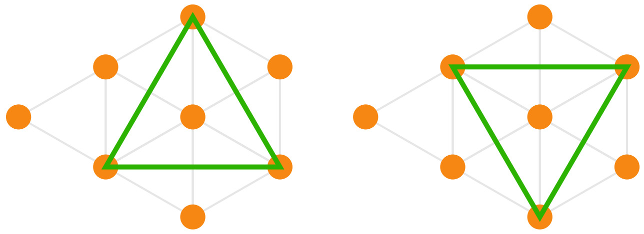
Soničke sa rozsypalo 8 pingpongových loptičiek. Rozsypali sa jej do časti siete tvorenej rovnostrannými trojuholníkmi tak ako na obrázku. Soničkin cit pre estetiku aj v tomto chaose videl nejaké pravidelnosti. Koľko pravidelných mnohouholníkov má všetky svoje vrcholy v týchto pingpongových loptičkách?
Poznámka: Pravidelné mnohouholníky sú rovnostranný trojuholník, štvorec, pravidelný päťuholník, pravidelný šesťuholník, pravidelný sedemuholník a tak ďalej.



Výsledok: 11
Riešenie: Medzi pravidelnými mnohouholníkmi sa nachádza 7 rovnostranných trojuholníkov tvoriacich trojuholníky siete. Taktiež sú medzi nimi tento väčší rovnostranný trojuholník a tento pravidelný šesťuholník:



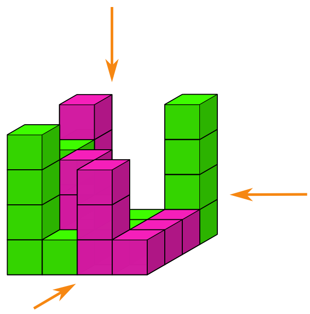
Okrem toho nájdeme ešte aj dva rovnostranné trojuholníky, ktoré nevedú po šedých čiarach:



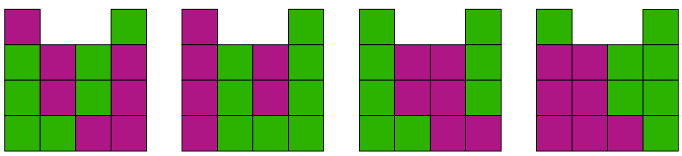
Na obrázku je preto 7 + 1 + 1 + 2 = 11 pravidelných mnohouholníkov.

Úloha 11. Pohľad na vec

Kubo sa hrá s farebnými kockami. Postavil z nich stavbu, ktorú vidíš na obrázku. Potom sa na celú stavbu pozrel z troch smerov naznačených šípkami (teda sa pozrel spredu, sprava a zhora).

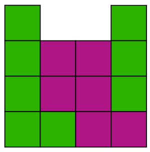


Ktorú z nasledujúcich možností pritom určite nevidel?



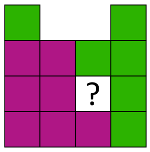
A B C D

Výsledok: B
Riešenie: Prejdime si jednotlivé pohľady.
Pohľad spredu: Vľavo vidíme rovno 4 zelené kocky, všetky ostatné sú nimi zakryté. Napravo od nich vidíme (zdola) fialovú kocku z predného radu a nad ňou 2 zelené z ďalšieho radu. Potom vidíme rovno 3 fialové a úplne vpravo vidíme 1 fialovú a nad ňou 3 zelené, ktoré sú až úplne vzadu. Dostávame tak pohľad ako na obrázku C:



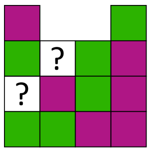
C

Pohľad sprava: Úplne vľavo vidíme najprv 3 fialové a potom 1 zelenú. Napravo od nich vidíme 3 fialové (najspodnejšia z nich je bližšie). Ďalej vidíme naspodku fialovú a navrchu zelenú kocku. Z tohto nakreslenia však nevieme určiť, akú kocku vidíme medzi nimi. Napokon úplne vpravo vidíme 4 zelené. Pohľad, ktorý máme, tak vedie na niečo, čomu zodpovedá jedine obrázok D:



D

Pohľad zhora: Postupujeme rovnako ako v predošlých dvoch prípadoch. Tentoraz sa nám však nepodarí určiť farbu dvoch kociek. To ale nemení nič na tom, že tomu zodpovedá jedine obrázok A:

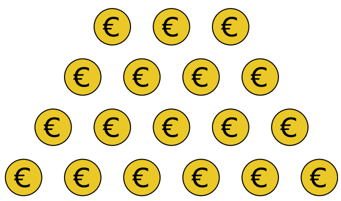


A

Jediná možnosť, ktorú určite nemôžeme vidieť, je tak na obrázku B.

Úloha 12. Lichobežník z mincí

Monika vytvára obrazce tvaru lichobežníka ukladaním mincí na stôl. Napríklad na obrázku je obrazec lichobežníka so základňami dlhými 3 mince a 6 mincí. Je zložený z 18 mincí. Z koľkých mincí bude zložený obrazec lichobežníka so základňami dlhými 10 mincí a 20 mincí?



<u>Výsledok:</u> 165
<u>Riešenie:</u> V jednotlivých riadkoch výsledného lichobežníka bude postupne 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 mincí. Stačí nám tieto čísla sčítať. Buď to ručne spočítame, alebo si pomôžeme takouto myšlienkou:
Popárujme čísla, ktoré sčítavame do dvojíc so súčtom 30 (t.j. dvojíc 10 + 20, 11 + 19, 12 + 18, 13 + 17 a 14 + 16) a číslo 15 zostane samostatne. Dvojíc je 5, takže majú súčet všetkých čísel je 5 · 30 + 15 = 165. V Monikinom trojuholníku bude 165 mincí.

Úloha 13. Dopravný podnik Attomatova

Dopravný podnik Attomatova chce zaviesť novú autobusovú linku medzi zastávkami Začiatočná a Konečná. Cesta zo Začiatočnej na Konečnú trvá autobusu 22 minút a rovnako dlho trvá cesta opačným smerom. Linku chcú zaviesť tak, aby mal autobus 10-minútovú prestávku po príchode na Začiatočnú, aj po príchode na konečnú. Zároveň chcú, aby zo Začiatočnej odchádzal autobus každých 5 minút. Koľko najmenej autobusov budú potrebovať na prevádzkovanie takejto linky?

<u>Výsledok:</u> 13
<u>Riešenie:</u> Spočítajme, ako dlho trvá od momentu, kedy autobus odíde zo Začiatočnej, kým bude môcť opäť raz odísť zo Začiatočnej.
Najprv ide 22 minút na konečnú, tam čaká aspoň 10 minút, potom sa 22 minút vracia a na Začiatočnej opäť čaká aspoň 10 minút. Spolu to autobusu trvá aspoň 22 + 10 + 22 + 10 = 64 minút. Ak má zo Začiatočnej odchádzať autobus každých 5 minút, môže byť tento autobus až tým, ktorý pôjde 65 minút po tom, ako prvýkrát odišiel zo Začiatočnej. Na obsluhu linky preto budú potrebovať najmenej 65 : 5 = 13 autobusov.

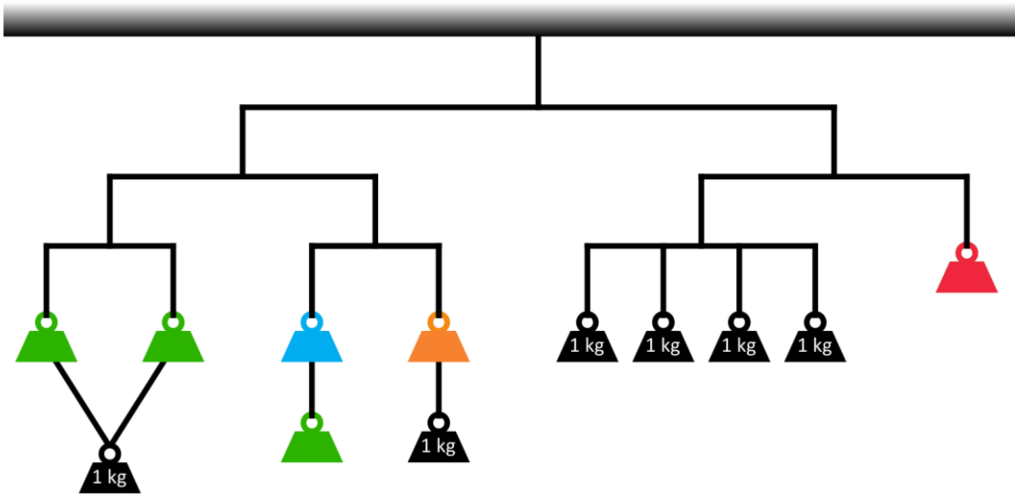
Úloha 14. Samko, zase?

Samko zabudol kód od svojho zámku na bicykli. Pamätal si iba to, že to bolo štvorciferné číslo, ktoré sa nezačínalo nulou. A tiež, že súčet cifier v kóde bol 4. Koľko možností musí Samko vyskúšať, aby mal istotu, že zámok odomkne?

<u>Výsledok:</u> 20
<u>Riešenie:</u> Rozoberme prípady podľa toho, ktorá cifra je ako prvá. Zo zadania vieme, že číslo sa nezačínalo nulou, takže do úvahy prichádzajú iba cifry 1, 2, 3, 4.
– Ak je prvá cifra 1, tak zvyšné cifry majú súčet 4 - 1 = 3. Zvyšné cifry tak sú 3 + 0 + 0, 2 + 1 + 0 alebo 1 + 1 + 1. V prvom prípade máme tri možnosti, ako tieto cifry zoradiť, v druhom dokonca šesť možností a v poslednom iba jednu možnosť. Dostávame teda možnosti 1300, 1030, 1003, 1210, 1201, 1120, 1102, 1021, 1012, 1111.
– Ak je prvá cifra 2, tak zvyšné cifry majú súčet 4 - 2 = 2. Zvyšné cifry sú tak buď 2 + 0 + 0, alebo 1 + 1 + 0. V oboch prípadoch máme tri možnosti zoradenia, čo dáva možnosti 2200, 2020, 2002, 2110, 2101, 2011.
– Ak je prvá cifra 3, tak zvyšné cifry majú súčet 4 - 3 = 1. To dáva pre zvyšné cifry iba možnosť 1 + 0 + 0, ktoré sa dajú zoradiť tromi spôsobmi. Získavame možnosti 3100, 3010, 3001.
– Ak je prvá cifra 4, tak zvyšné cifry majú súčet 4 - 4 = 0. Nutne sú to teda tri nuly, čím dostávame jedinú možnosť 4000.
Dohromady tak musí Samko vyskúšať 10 + 6 + 3 + 1 = 20 možností.

Úloha 15. Páky

Kubo poslednou dobou máva nočné mory o pákach, jedna taká sa mu snívala aj dnes. No pozrite na obrázok. Závažia rovnakej farby majú rovnakú hmotnosť a všetko je v rovnováhe. Vašou úlohou je zoradiť farebné závažia od najľahšieho po najťažšie.



Výsledok: modrá; oranžová; zelená; červená

Riešenie: Zamerajme sa najprv na ľavú časť. Z nej vidíme, že 2 zelené závažia spolu kilogramovým závažím vážia rovnako ako spolu vážia modré, zelené, oranžová a kilogramové závažia. Vyhoďme to, čo majú spoločné. Zistíme, že zelené závažie váži rovnako veľa ako modré a oranžové spolu. Pozrime sa teraz len na časť obsahujúcu modré a oranžové závažia. Vieme, že modré a zelené závažie vážia spolu toľko, koľko oranžové a kilogramové závažie. Keď zelené závažie nahradíme modrým a oranžovým (čo vieme z predošlého odseku) a vyhodíme to, čo majú spoločné, dostaneme toto: 2 modré závažia vážia rovnako veľa ako kilogramové závažie. Čiže modré závažie váži 0,5 kg.

Vráťme sa k celej sústave. Keď nahradíme modré a oranžové závažia na ľavej strane zeleným závažím, dostaneme, že celá ľavá strana sa skladá zo 4 zelených závaží a dvoch kilogramových závaží. Zato na pravej strane sú v rovnováhe štyri kilogramové závažia s červeným závažím, ktoré tak musí vážiť 4 kilogramy. Celá pravá strana teda váži 4 + 4 = 8 kilogramov. Rovnako musí vážiť aj ľavá strana. Takže 4 zelené závažia musia vážiť 6 kilogramov, čiže jedno zelené závažie váži 6 : 4 = 1,5 kilogramu.

Napokon už len z informácie z prvého odseku dopočítame, že oranžové závažie váži 1,5 kg - 0,5 kg = 1 kg. Správne zoradenie je preto: modrá (0,5 kg), oranžová (1 kg), (zelená 1,5 kg), červená (4 kg).

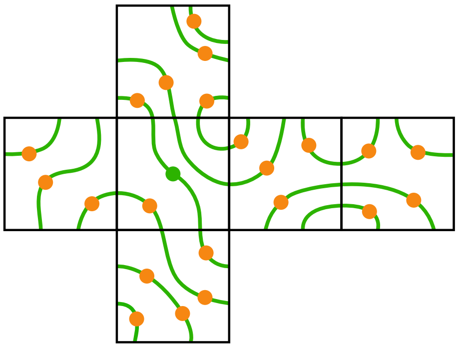
Úloha 16. Veľa šťastia

Soňa chcela nájsť štvorlístok. Rozhodla sa preto vytrhať každú jednu ďatelinku v záhrade. Nazbierala ďatelinky, ktoré mali dohromady 590 lístkov. Trojlístkov našla 12-krát viac ako štvorlístkov. Pritom našla aj zopár pätlístkov, no najmenej zo všetkých. Koľko päťlístkov našla?

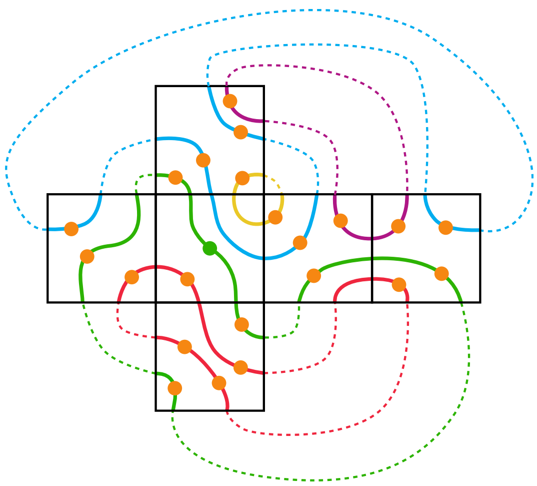
<u>Výsledok:</u> 6
<u>Riešenie:</u> Každému nájdenému štvorlístku zodpovedá 12 nájdených trojlístkov. Štvorlístky a trojlístky tak môžeme rozdeliť do skupín. V každej skupine bude jeden štvorlístok a 12 trojlístkov. Ďatelinky v skupine teda budú mať spolu 4 + 12 · 3 = 40 lístkov. Keďže 590 : 40 = 14, zvyšok 30, tak vieme, že máme najviac 14 takýchto skupín a ešte nám zostane 30 lístkov na päťlístky. Tým dostávame prvú možnosť na počet päťlístkov – že ich je 30 : 5 = 6 (a ľahko vieme dopočítať, že máme 14 štvorlístkov a 14 · 12 = 168 trojlístkov).
Keby sme zvolili menej skupín trojlístkov a štvorlístkov, tak by na päťlístky zostalo aspoň 30 + 40 = 70 lístkov, čiže päťlístkov by bolo aspoň 70 : 5 = 14. Lenže vtedy je počet skupín, a teda aj počet štvorlístkov, menší ako 14. Teda päťlístkov by nebolo najmenej zo všetkých (bolo by ich viac ako štvorlístkov).
Tým pádom musí prípadu z úlohy zodpovedať prvá nájdená možnosť, že Soňa našla 6 päťlístkov.

Úloha 17. Zase kocka

Stano si zobral papier a nakreslil naň sieť kocky. Potom na ňu nakreslil niekoľko čiar a kruhov ako na obrázku. Potom kocku zložil. Teraz sa so svojou kockou hrá. Zobral ceruzku a od zeleného kruhu zisťuje, kam všade sa vie dostať po zelenej čiare. Zistil, že sa vie vydať zo zeleného kruhu dvomi smermi. Tak sa rozhodol, že jednou cestou sa zo zeleného kruhu vydá a tou druhou sa vráti. Koľko oranžových kruhov pri tom prejde?



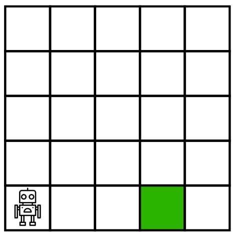
<u>Výsledok:</u> 6
<u>Riešenie:</u> Najlepšie sa táto úloha rieši, ak si vieme plášť zo zadania vystrihnúť. Vtedy len jednoducho spočítame oranžové kruhy.
Pre nás, ktorým sa nechce strihať / tlačiť / prekresľovať, dá sa to aj v hlave (ak to zvládaš, tak máš náš obdiv). Prípadne si uvedomíme, ako sa správajú horný a dolný štvorec. Zoberme si napríklad horný z nich. Jeho ľavá strana sa po poskladaní stane totožnou s hornou stranou ľavého štvorca. To znamená, že po poskladaní budú tvoriť tú istú hranu kocky. Toto sa ešte dá pomerne ľahko predstaviť si – napríklad pomôže, ak si predstavíme štvorec so zeleným kruhom na vrchu našej kocky. Podobným spôsobom vieme, ako sa bude správať pravá strana horného štvorca – že sa stane totožnou s hornou stranou štvorca, ktorý je napravo od štvorcom so zeleným kruhom (tieto dve strany teda vytvoria tú istú hranu výslednej kocky).
Náročnejšie je pochopiť zvyšnú stranu horného štvorca. Napríklad pri predstave „so štvorcom so zeleným kruhom na vrchu kocky“ si u nej vieme uvedomiť, že sa stane totožnou s hornou stranou štvorca úplne napravo.
Podobne to všetko zbehne aj na spodnej strane. Jediné strany, ku ktorým sme sa zatiaľ nevyjadrili, sú tá najviac vľavo a tá najviac vpravo, ktoré sa stanú totožnou.
Po tomto siahodlhom uvedomovaní s môžeme pospájať, ako budú vyzerať jednotlivé čiary na kocke. Dopadne to takto (čiary, ktoré sú súčasťou jednej dlhej, sme dali rovnakou farbou):



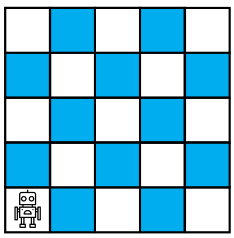
Už len jednoducho spočítame, že na zelenej čiare je 6 oranžových kruhov.

Úloha 18. Robota pre robota

Terka vyhrabala na povale svojho robota. Postavila ho na plánik 5 × 5 tak ako na obrázku. Teraz chce, aby robot navštívil každé políčko presne raz (políčko, kde začína, navštívil hneď na začiatku) a aby skončil na zelenom políčku. Robot pritom vie prechádzať iba na políčka susediace stranou. Vie Terka naprogramovať robota tak, aby sa to robotovi podarilo?



Výsledok: nie
Riešenie: Ofarbime si políčka tak ako na tomto obrázku:



Pri svojich pohyboch sa robot bude pohybovať striedavo po bielych a modrých políčkach. Na začiatku je robot na bielom políčku a chce skončiť na modrom políčku. Lenže bielych políčok je o 1 viac ako modrých políčok. A tak, ak má robot prejsť všetky políčka, tak musí skončiť na bielom políčku. Odpoveď je teda, že robot nevie skončiť na vyznačenom zelenom políčku.

Úloha 19. Otravný spolubývajúci

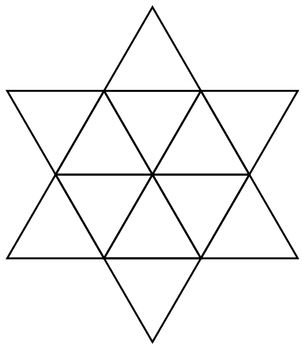
Majo sa hrá so svojím obľúbeným dvojciferným číslom. Jeho spolubývajúci Maťo poznamenal tri vlastnosti Majovho čísla:
A: Je to číslo väčšie ako 50.
B: Súčet cifier tohto čísla je aspoň 8.
C: Súčin cifier tohto čísla je aspoň 15.
Vtom sa Majo pousmial a povedal Maťovi, že jedna z vlastností je samozrejmosťou, keď platia tie zvyšné. Ktorá z nasledujúcich viet je pravdivá?

a) Vždy, keď má dvojciferné číslo vlastnosti B a C, tak má aj vlastnosť A.
b) Vždy, keď má dvojciferné číslo vlastnosti C a A, tak má aj vlastnosť B.
c) Vždy, keď má dvojciferné číslo vlastnosti A a B, tak má aj vlastnosť C.

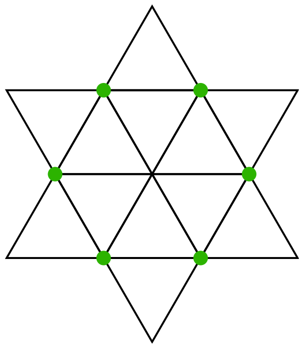
Výsledok: b)
Riešenie: Číslo 91 má síce vlastnosti A aj B, ale nemá vlastnosť C. Podobne, číslo 29 má vlastnosti B aj C, ale nemá vlastnosť A. Jediná pravdivá možnosť tak môže byť možnosť b).
Overíme, že z A a C skutočne vyplýva B. Ak je číslo väčšie ako 50, tak na mieste desiatok má niektorú z cifier 5, 6, 7, 8, 9. Ak je tam cifra 8 alebo 9, tak bez ohľadu na hodnotu druhej cifry je súčet cifier určite aspoň 8. Na druhej strane, ak je na mieste desiatok niektorá z cifier 5, 6, 7, tak na mieste jednotiek musí byť cifra aspoň 3 ($5 \cdot 2 = 10$, $6 \cdot 2 = 12$ a $7 \cdot 2 = 14$ je menej ako 15). Takže súčet cifier musí byť aspoň $5 + 3 = 8$.
To znamená, že pravdivá je veta b).

Úloha 20. Jedným ťahom?

Laura by chcela nakresliť slnko pozostávajúce z 12 rovnostranných trojuholníkov ako na obrázku. Chce ho nakresliť tak, že nezdvihne ceruzku z papiera (môže po niektorej čiare prejsť viackrát). Laure trvá nakreslenie jednej strany trojuholníka 5 sekúnd. Koľko najmenej sekúnd potrvá Laure nakreslenie celého slnka?



Výsledok: 130
Riešenie: Naším cieľom je prejsť po každej čiare tak, aby sme čo najmenejkrát prešli po nejakej čiare, po ktorej sme už prešli.
Ak nerátame bod, v ktorom začíname alebo končíme, tak nami kreslená čiara každým bodom len prechádza. Preto ak nemáme po nejakej čiare vychádzajúcej z daného bodu prejsť viac ako raz, tak z tohto bodu musí ísť párny počet čiar. Výnimku tvoria body, v ktorých začíname a končíme – v nich nám začiatok / koniec umožnia mať aj nepárny počet čiar. Pozrime sa teda, koľko máme bodov, z ktorých vychádza nepárny počet čiar. V našom prípade to sú tieto:



Keby boli len 2, tak by sme vedeli obrázok nakresliť bez toho, aby sme po nejakej čiare prešli viackrát. Lenže my takých bodov máme 6. Dva z nich vyriešime tým, že v nich bude začiatok alebo koniec. Na tie zvyšné budeme musieť „obetovať“ to, že po nejakej čiare prejdeme viackrát. Našťastie máme čiary, ktoré spájajú tieto zelené body. Preto dvojnásobným prejdením niektorej z čiar, ktorá ich spája, vyriešime problémy rovno s dvomi zelenými bodmi (je to akoby sme čiaru, ktorá ich spája zdvojili a už z nich nebude vychádzať nepárny počet čiar). Vďaka tomuto vidíme, že keď niektoré dve čiary prejdeme dvakrát, tak to už budeme vedieť nakresliť (správne nakreslenie tu pre prehľadnosť neuvádzame, ale odporúčame nájsť si ho).
Na obrázku je 24 strán trojuholníkov a po dvoch prejdeme dvakrát, takže potrebujeme prejsť 24 + 2 = 26 čiar. Laura preto bude kresliť slnko najmenej 26 · 5 = 130 sekúnd.