attomat

17.09.2024

Vzorové riešenia

Kategórie 5, 6, Príma

p-mat

Úloha 01. Padajúca úloha

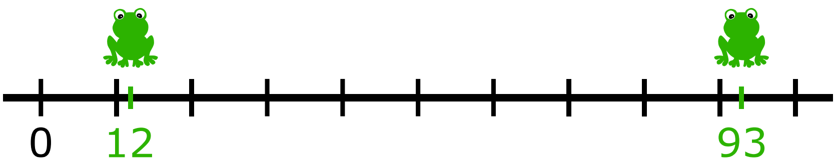
Anička hodila dvomi klasickými hracími kockami. Na nich sú čísla od 1 do 6, každé presne raz. Ktorá z týchto situácií mohla nastať?

a) Súčet čísel, ktoré padli, je 1.
b) Súčin čísel, ktoré padli, je 1.
c) Súčet čísel, ktoré padli, je 13.
d) Súčin čísel, ktoré padli, je 13.

Výsledok: b)
Riešenie: Pozrime sa na každú možnosť a zamyslime sa nad tým, či takýto stav mohol nastať.
a) Najnižšie čísla, aké môžeme na oboch kockách hodiť sú jednotky. Preto najmenší možný súčet na dvoch kockách je 1 + 1 = 2. To znamená, že súčet 1 sa nedá dosiahnuť.
b) Keď hodíme dve jednotky, ich súčin je 1 · 1 = 1. Táto možnosť je správna.
c) Najväčšie čísla, aké dokážeme na oboch kockách získať sú šestky. To znamená, že najväčší možný súčet je 6 + 6 = 12. Súčet 13 preto nie je možný.
d) Keď sa chvíľu pohráme s číslom 13 a skúsime ho vydeliť všetkými číslami od 1 do 13, zistíme, že jediné, čo ho delia bezo zvyšku sú práve čísla 1 a 13. To znamená, že takýto súčin by sme vedeli dostať jedine ako 1 · 13 = 13. Trinástku na kocke hodiť nedokážeme, preto táto možnosť nie je správna. Správna je teda odpoveď b).

Úloha 02. Žabka, hop!

Dve žaby sedia na číselnej osi – jedna z nich na čísle 12, druhá na čísle 93. Vtom Mišo začne tlieskať a na každé tlesknutie žaby skočia. Každá zo žiab skáče smerom k druhej žabe a vždy skočí o tretinu vzdialenosti smerom k druhej žabe. Mišo takto tleskol trikrát. Na ktorom čísle momentálne stojí žaba, ktorá začínala na čísle 93?



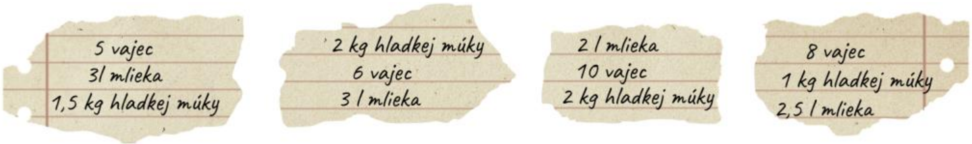
Výsledok: 54
Riešenie: Na začiatku sú žaby od seba vzdialené 93 - 12 = 81. Tretina tejto vzdialenosti je 81 : 3 = 27. Po prvom Mišovom tlesknutí tak ľavá žaba skočí doprava na číslo 12 + 27 = 39 a pravá žaba skočí doľava na číslo 93 - 27 = 66.
Teraz je vzdialenosť medzi žabami 66 - 39 = 27, z čoho tretina je 27 : 3 = 9. Po druhom tlesknutí tak ľavá žaba skočí na číslo 39 + 9 = 48 a pravá žaba na číslo 66 - 9 = 57.
Medzi žabami zostáva vzdialenosť 57 - 48 = 9, z čoho tretina je 9 : 3 = 3. Po treťom tlesknutí tak ľavá žaba skončí na čísle 48 + 3 = 51 a pravá žaba na čísle 57 - 3 = 54.
Žaba, ktorá začínala na čísle 93, teda po troch tlesknutiach skončí na čísle 54.

Úloha 03. Palacinky

Vedúci P-matu si na chate varili palacinky. Kubo pritom na internete našiel recept, podľa ktorého na 10 palaciniek potrebuje nasledovné suroviny:

– 400 ml mlieka,
– 200 g hladkej múky,
– 1 vajce.

Hladných krkov na chate je však viac, a tak sa Kubo rozhodol spraviť 55 palaciniek. Napísal preto, koľko čoho treba nakúpiť aj s rezervou. V ktorej z nasledujúcich možností je nákupný zoznam, z ktorého sa dá spraviť 55 palaciniek?



a) b) c) d)

<u>Výsledok:</u> b)
<u>Riešenie:</u> Spočítajme si, aké množstvo surovín potrebujeme na 55 palaciniek. Na to najprv spočítajme, aké množstvo surovín potrebujeme na 5 palaciniek. To je polovica 10 palaciniek, takže potrebujeme aj polovičné množstvá, teda 400 ml : 2 = 200 ml mlieka, 200 g : 2 = 100 g hladkej múky a polovicu vajíčka. Keďže 55 palaciniek je 11-krát viac ako 5 palaciniek, potrebujeme na ne 11-krát väčšie množstvo surovín, čiže 11 · 200 ml = 2200 ml = 2,2 l mlieka, 11 · 100 g = 1100 g = 1,1 kg hladkej múky a 11 polovíc, čiže 5 a pol vajíčka.
Teraz sa pozrime na jednotlivé nákupné zoznamy. V možnosti a) máme málo vajíčok (iba 5), v možnosti c) máme málo mlieka (iba 2 litre) a v možnosti d) máme málo hladkej múky (iba 1 kilogram). Jedine v možnosti b) máme dostatočne veľa všetkého. Správny nákupný zoznam je tak v možnosti b).

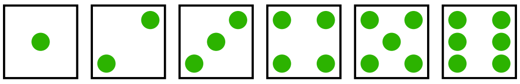
Úloha 04. Riaditeľka slniečko

Renka sa usmieva ako slniečko. Preto si vymyslela novú počtovú operáciu, ktorú bude označovať ☼. Pre ľubovoľné dve čísla x, y sa x ☼ y vypočíta nasledovne: x ☼ y = x · y - x - y. Teda napríklad 6 ☼ 4 = 6 · 4 - 6 - 4 = 24 - 10 = 14. Ihneď sa podujala spočítať niečo komplikované. Aké číslo dostane Renka, keď spočíta (5 ☼ 3) ☼ (2 ☼ 6)?

<u>Výsledok:</u> 17
<u>Riešenie:</u> Túto úlohu riešme tak, že najskôr si vypočítame hodnoty oboch zátvoriek.
Prvá zátvorka: 5 ☼ 3 = 5 · 3 - 5 - 3 = 7.
Druhá zátvorka: 2 ☼ 6 = 2 · 6 - 2 - 6 = 4.
Keď sme si už osobitne vypočítali zátvorky, môžeme zátvorky v úlohe nahradiť ich výsledkami. Úloha bude potom vyzerať takto:
7 ☼ 4 = 7 · 4 - 7 - 4 = 17
Renka dostane číslo 17.

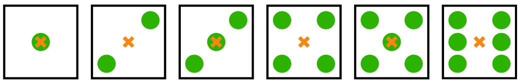
Úloha 05. Súmerná kocka

Šimona zaujala úplne klasická hracia kocka. Na obrázku vidíte, ako zvyčajne vyzerá rozloženie bodiek na jednotlivých stenách hracej kocky. Šimona zaujalo, že bodky sú na kocke vždy stredovo súmerné, ale nie je to vždy podľa stredu niektorej bodky. Ktoré všetky z týchto hodnôt sú stredovo súmerné podľa stredu niektorej svojej bodky?



Poznámka: Pozor: Viac odpovedí môže byť správnych!

Výsledok: 1; 3; 5
Riešenie: Vyznačme si, kde sa nachádza stred súmernosti každej strany kocky:



Z toho už poľahky určíme, že iba hodnoty 1, 3 a 5 majú stred súmernosti v strede niektorej bodky. Poznámka: Nie je náhoda, že vyšli iba nepárne hodnoty. Všetky bodky na kocke sa totiž musia popárovať a v stredovej súmernosti sa zobraziť na seba navzájom. Výnimkou je tá, ktorej stred bude stredom súmernosti, lebo tá sa vie zobraziť sama na seba. Preto sa pre párne hodnoty všetky bodky popárujú a pre nepárne hodnoty sa popárujú všetky hodnoty okrem jednej, v ktorej strede bude stred súmernosti.

Úloha 06. Neznášam pondelky

Nina má vlastný systém hodnotenia toho, ako sa jej páčia dni v týždni. Jednotlivým dňom prideľuje alebo odoberá body podľa ňou určených kritérií. Tie sú:

1. ak je to deň víkendu... + 5 bodov
2. ak po ňom nasleduje deň víkendu... + 2 body
3. ak sa tento deň končí na písmeno „k“... - 3 body
4. ak je názov tohto dňa trojslabičné slovo... + 1 bod
5. ak je to pondelok... - 4 bodov

Zoraď dni týždňa podľa počtu pridelených bodov. Začni tým, ktoré má najviac bodov.

Výsledok: sobota; nedeľa; streda; piatok; utorok; štvrtok; pondelok
Riešenie: Pozrime sa postupne na každý deň v týždni a vyrátajme, koľko bodov im Nina pridelí:
Pondelok – spĺňa v poradí 3., 4. aj 5. kritérium. Počet bodov je - 3 + 1 - 4 = - 6.
Utorok – pre utorok platí 3. a 4. kritérium. Počet bodov: - 3 + 1 = - 2.
Streda – nespĺňa žiadne kritérium, počet bodov je 0.
Štvrtok – spĺňa iba 3. kritérium, počet bodov je - 3.
Piatok – pre piatok platí 2. a 3. kritérium. Nina mu udelí: 2 - 3 = - 1 bod.
Sobota – spĺňa 1., 2. a 4. kritérium, dostáva 5 + 2 + 1 = 8 bodov.
Nedeľa – spĺňa 1. a 4. kritérium, počet bodov má 5 + 1 = 6 bodov.

Keď dni zoradíme podľa počtu bodov od najväčšieho, dostávame výsledné poradie:
sobota, nedeľa, streda, piatok, utorok, štvrtok, pondelok.

Úloha 07. Dátum ako číslo

Ivka má displej, na ktorom je každý deň napísaný aktuálny dátum. Napríklad dnes na ňom svieti 17.09. Ivka však rada interpretuje dátum ako 4-ciferné číslo, čiže napríklad dnes je to číslo 1709. Ivke sa nepáči, že toto číslo nie je násobkom 9. O koľko dní sa prvýkrát stane, že Ivkou prečítané 4-ciferné číslo bude násobkom 9?

Výsledok: 1
Riešenie: To, či je nejaké číslo násobkom 9 zistíme veľmi jednoducho. Stačí ho vydeliť 9 – ak je výsledok celé číslo bezo zvyšku, naše pôvodné číslo je násobkom 9.
Číslo 1709 nie je násobkom 9, lebo 1709 : 9 = 189, zvyšok 8. Vyskúšajme, či v nasledujúcich dňoch sa stane, že Ivka prečíta 4-ciferné číslo, ktoré násobkom 9 je.
Nasledujúci deň je 18.09., a teda Ivka prečíta číslo 1809. Platí 1809 : 9 = 201. Vidíme, že výsledok je celé číslo bezo zvyšku. To znamená, že o 1 deň sa stane, že Ivkou prečítané 4-ciferné číslo bude násobkom 9.

Úloha 08. Mlynček, var!

Stano si vytvoril mlynček na čísla. Keď doň Stano vloží nejaké číslo, z mlynčeka vyjde číslo podľa nasledovných pravidiel:
– mlynček najprv spočíta súčet cifier vloženého čísla,
– potom mlynček spočíta súčin cifier vloženého čísla,
– napokon mlynček napíše obe získané výsledky za seba, pričom najprv napíše súčet cifier.
Napríklad ak Stano vloží číslo 234, tak mlynček vráti číslo 924, keďže 2 + 3 + 4 = 9 a 2 · 3 · 4 = 24.

Stano do mlynčeka vložil nepárne dvojciferné číslo a z mlynčeka vyšlo číslo 1342. Aké nepárne dvojciferné číslo Stano vložil do mlynčeka?

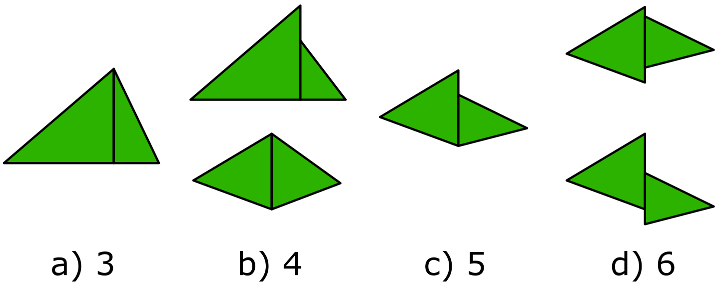
Výsledok: 67
Riešenie: Najprv si rozmyslime, ako správne rozdeliť číslo 1342 na dve čísla, z ktorých jedno bude súčet a druhé súčin cifier Stanovho čísla. Súčet cifier dvojciferného čísla bude určite aspoň 1 a najviac 18 (pre číslo 99). Do úvahy tak prichádzajú len dve možnosti:
1. súčet cifier je 1 a súčin cifier je 342,
2. súčet cifier je 13 a súčin cifier je 42.
Jediné dvojciferné číslo, ktorého súčet cifier je 1, je číslo 10. To však nemá súčin cifier 342 a tiež nie je nepárne. Správna možnosť je preto druhá možnosť.
Hľadáme teda nepárne dvojciferné číslo so súčtom cifier 13 a súčinom cifier 42. Súčet cifier 13 sa dosiahnuť iba tromi spôsobmi: 9 + 4, 8 + 5 a 7 + 6. V jednotlivých prípadoch dostávame súčin cifier 9 · 4 = 36, 8 · 5 = 40 a 7 · 6 = 42. Z toho vidíme, že Stanovo číslo obsahuje cifry 6 a 7. Z nich máme poskladať nepárne číslo, takže na mieste jednotiek musí byť cifra 7. Stano teda do mlynčeka vložil číslo 67.

Úloha 09. Strihám, strih. áš, strihláme

Maťko rád strihá. Minule si z papiera vystrihol dva trojuholníky. Potom ich oba prilepil na papier tak, aby sa trojuholníky dotýkali, no neprekrývali. Potom spočítal počet strán vzniknutého útvaru. Ktoré z nasledujúcich čísel nemôže byť počtom strán vzniknutého útvaru?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) všetky predošlé počty sa dajú dosiahnuť

<u>Výsledok:</u> e)
<u>Riešenie:</u> Ukážeme, že všetky možnosti sa dajú dosiahnuť. Na to stačí nájsť príklady toho, kedy sa to stane. Niekedy na to máme aj viac možností:



Vidíme teda, že všetky možnosti sa dajú dosiahnuť, takže správna odpoveď je e).

Úloha 10. Držať sa na kraji

Kika má záhradu tvaru obdĺžnika so šírkou 10 m. V jednom bode na jej obvode je bránka a v inom bode sú dvere do domu. Kika stojí pri bránke a chce po obvode záhrady prejsť k dverám do domu. Zistila, že to vie spraviť dvomi spôsobmi. Pri jednom z nich nakráča 24 m, pri druhom nakráča 28 m. Aká je dĺžka záhrady (druhého rozmeru obdĺžnika) v metroch?

<u>Výsledok:</u> 16
<u>Riešenie:</u> Ak by Kika prešla od bránky k dverám jednou z ciest a potom by prešla druhou z ciest zase od dverám k bránke, prešla by celý obvod záhrady. Obvod záhrady preto musí byť 24 m + 28 m = 52 m. Pritom dvakrát prejde dlhšiu stranu záhrady a dvakrát kratšiu stranu. Dĺžka dlhšej strany záhrady preto musí byť (52 m - 2 · 10 m) : 2 = 16 m.

Úloha 11. Letná škola zaokrúhľovania

Matúš s Katkou sa učia zaokrúhľovať. Vždy si napíšu na papier nejaké dvojciferné číslo a idú zaokrúhľovať. Matúš najprv toto číslo zaokrúhli na desiatky a potom výsledok zaokrúhli na stovky. Katka číslo na papieri rovno zaokrúhli na stovky. Matúš s Katkou zistili, že nie vždy dostanú rovnaký výsledok. Pre koľko rôznych dvojciferných čísel sa stane, že Matúš s Katkou dostanú rôzne výsledky?

<u>Výsledok:</u> 5
<u>Riešenie:</u> Matúš s Katkou pracujú s dvojciferným číslom. Obaja na konci zaokrúhľujú na stovky, takže môžu dostať len dva výsledky – 0 a 100. Pozrime sa, ktorý výsledok dostanú v závislosti od toho, s akým dvojciferným číslom začali.
U Katky je to jednoduché – tá rovno zaokrúhli na stovky. Takže čísla 10 až 49 zaokrúhli na 0, kým čísla 50 až 99 zaokrúhli na 100.
Matúš predtým zaokrúhľuje na desiatky. V konečnom dôsledku zaokrúhli na 0 všetky čísla, ktoré sa po zaokrúhlení na desiatky zaokrúhlia na niektoré z čísel 0, 10, 20, 30 a 40. To spĺňajú čísla 10 až 44. Tie, ktoré sa po zaokrúhlení na desiatky zaokrúhlia na niektoré z čísel 50, 60, 70, 80, 90 a 100 sa potom zaokrúhlia na 100. To spĺňajú čísla 45 až 99.
Matúšove a Katkine výsledky sa líšia pre čísla 45, 46, 47, 48 a 49, kedy Katka dostane výsledok 0, no Matúš dostane výsledok 100. To znamená, že Matúš s Katkou dostanú rôzne výsledky pre 5 dvojciferných čísel.

Úloha 12. Dvojky a sedmičky

Janka má rada iba cifry 2 a 7. Preto skladá čísla, ktoré obsahujú iba tieto dve cifry. Obe cifry má však rovnako rada, a tak vyžaduje, aby boli obe cifry vo výslednom čísle zastúpené rovnako. Janka však nemá rada číslo 27, lebo je príliš jednoduché. Preto rozmýšľa: vie Janka takýmto spôsobom dostať nejaké číslo iné ako číslo 27, ktoré je násobkom čísla 27?

Výsledok: áno
Riešenie: Hoci máme zakázané číslo 27, nič nám nebráni napísať číslo 27 dvakrát za seba, čím dostaneme číslo 2727. Toto číslo spĺňa Jankinu požiadavku, aby obsahovalo rovnako veľa dvojok ako sedmičiek. Zároveň platí 2727 : 27 = 101, takže je to aj násobok 27. Janka tak vie dostať aj nejaký iný násobok 27 ako samotné číslo 27, čiže odpoveď je áno.

Úloha 13. Nerozhodnosť

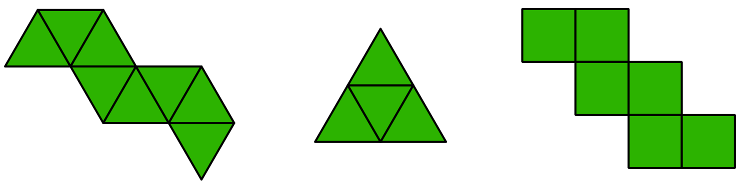
Štyria spolužiaci Andrea, Beáta, Cyril a Denis sa majú postaviť do radu. Zistili, že to však môžu spraviť viacerými spôsobmi. Aby si to zjednodušili, napadlo im niekoľko pravidiel, podľa ktorých by sa mohli postaviť. Ktoré z týchto pravidiel zabezpečí, že budú mať najmenej možností toho, ako sa postaviť do radu?

a) Na začiatku radu musia byť dievčatá a až potom chlapci.
b) Beáta musí stáť na začiatku radu, ostatní môžu stáť ľubovoľne.
c) Dievčatá a chlapci sa v rade musia striedať.

Výsledok: a)
Pre každú z možností spočítajme, koľkými spôsobmi sa budú môcť spolužiaci postaviť do radu. Pre prehľadnosť používajme namiesto mien spolužiakov iba ich prvé písmená – teda A, B, C a D.
a) Dievčatá na začiatku vedia byť v niektorom z poradí AB alebo BA. Podobne chlapci vedia byť v jednom z poradí CD alebo DC. Každé poradie vedia skombinovať s každým, takže spolu majú 4 poradia, konkrétne ABCD, ABDC, BACD, BADC.
b) Na začiatku je B, takže zostáva zoradiť zvyšných troch. To vieme spraviť niektorou z možností ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA. Máme tak 6 možností zoradenia, konkrétne BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA.
c) Ak sa rad začína dievčaťom, tak máme 4 poradia – ACBD, ADBC, BCAD, BDAC. Ak sa rad začína chlapcom, tak máme tiež 4 poradie – CADB, CBDA, DACB, DBCA. Spolu tak máme 4 + 4 = 8 možností. Vidíme teda, že najmenej možností postavenia sa do radu majú v možnosti a), kedy majú „len“ 4 možnosti.

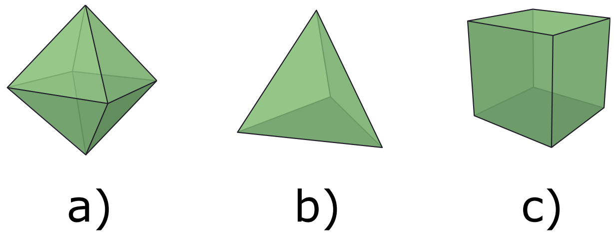
Úloha 14. Platonická láska k strihaniu

Miško rád vystrihuje. Minule sa k nemu dostalo niekoľko vystrihovačiek, ktoré sa po vystrihnutí dali poskladať na nejaké teleso. Tak ich Miško vystrihol a poskladal. Na ktorom z nasledujúcich obrázkov je vystrihovačka, z ktorej Miško dostane teleso s najviac vrcholmi?



a) b) c)

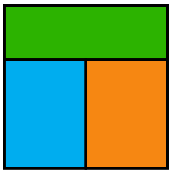
Výsledok: c)
Riešenie: Ak si útvary vystrihneme a poskladáme (alebo si skúsime predstaviť, čo také by sme mohli dostať), dostaneme v jednotlivých prípadoch telesá ako na týchto obrázkoch:



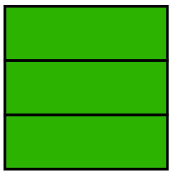
Jedná sa postupne o pravidelný osemsten, pravidelný štvorsten a kocku (pravidelný šesťsten). Ľahko spočítame, že majú postupne 6, 4 a 8 vrcholov, takže najviac vrcholov má teleso na obrázku c).

Úloha 15. Hodina kreslenia

Patrik si kreslí. Dnes si nakreslil štvorec a ten rozdelil na 3 časti. Každú z týchto častí zafarbil inou farbou, pričom na zafarbenie každej minul rovnako veľa farby. Patrikov výtvor vidíš na obrázku. Patrik potom zmeral, že kratšia strana zeleného obdĺžnika má 3 cm. Koľko centimetrov meria obvod štvorca, ktorý Patrik nakreslil?



Výsledok: 36
Riešenie: Na modrý aj oranžový obdĺžnik minul Patrik rovnako veľa farby ako na zelený obdĺžnik. Na zelený obdĺžnik teda minul tretinu všetkej použitej farby. Čiže zelený obdĺžnik zaberá tretinu veľkého štvorca. To znamená, že štvorec vieme rozdeliť na 3 rovnaké časti rovnakého tvaru ako zelený obdĺžnik:



Keďže kratšia strana zeleného obdĺžnika je dlhá 3 cm, vidíme z obrázka, že strana štvorca musí byť dlhá 3 · 3 cm = 9 cm. Obvod tohto štvorca je potom 4 · 9 cm = 36 cm.

Úloha 16. Katka sa vždy podelí

Katka má rada čísla, ktoré sú násobkom veľkých čísel. Ku každému číslu vždy dopočíta najväčšie číslo menšie ako dané číslo, ktorého násobkom je pôvodné číslo. Napríklad pre číslo 60 platí 60 = 2 · 30, takže číslo 60 je násobkom čísla 30. Navyše platí, že číslo 60 nie je násobkom žiadneho väčšieho čísla (je ešte násobkom čísla 60, ale to máme zakázané). Preto Katka k číslu 60 dopočíta číslo 30.

Potom Katka spravila to isté s číslami 26, 45, 77, 95. Zoraď tieto čísla podľa čísel, ktoré k nim Katka dopočítala – začni číslom, kde Katka dostala najväčšie číslo.

Výsledok: 95; 45; 26; 77

Riešenie: Mohli by sme postupne skúšať deliť čísla 26, 45, 77, 95 menšími číslami a keď by sa nám to prvýkrát podarilo, tak sme delili číslom, ktoré Katka vypočítala. To je ale pracné, skúsme to ináč. Všimnime si, že keď by sme to robili tým pomalým spôsobom, tak by sme zakaždým dostávali čoraz väčší a väčší podiel (lebo delíme na menej častí). Hľadať najväčšie číslo, ktorým môžem nejaké číslo vydeliť, je tak rovnaká úloha ako hľadať najmenší možný podiel. Napríklad pre číslo 60 z príkladu v zadaní je 2 najmenší podiel, aký vieme dostať – podiel 1 máme zakázaný (nemôžeme deliť 60) a iné menšie číslo ako 2 podiel byť nemôže. Zároveň, keď vieme podiel, vieme aj zistiť, čím sme delili – stačí delenca vydeliť podielom. Čiže v našom príklade spočítame 60 : 2 = 30. A ak sa to dá bezo zvyšku, tak sme našli možný podiel. Toto použime pre všetky čísla zo zadania.

Číslo 26. Podiel 1 máme zakázaný, skúsme podiel 2. To ide, pretože 26 : 2 = 13. Pre číslo 26 tak Katka dopočíta číslo 13.

Číslo 45. Je nepárne, takže dvojkou ho vydeliť nevieme, vyskúšajme trojku. Zistíme, že 45 : 3 = 15, takže Katka dopočíta číslo 15.

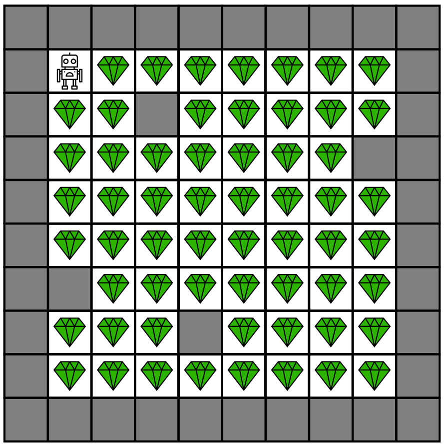
Číslo 77. Tu sa nám nepodarí deliť žiadnym z čísel 2, 3, 4, 5, 6 a až číslo 7 zafunguje, kedy dostaneme 77 : 7 = 11. Katka tak dopočíta číslo 11.

Číslo 95. V tomto prípade ako prvé zafunguje delenie číslom 5 a dostaneme 95 : 5 = 19, čiže Katka dopočíta číslo 19.

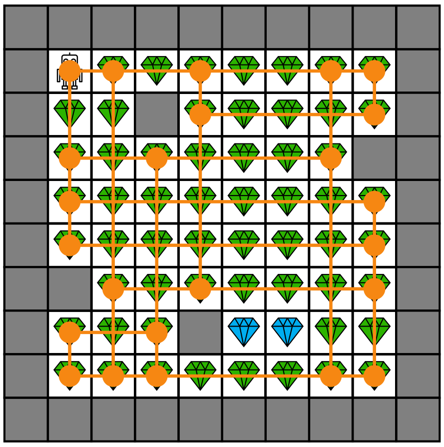
Už len zoradiť Katkou dopočítané číslo od najväčšieho, teda v poradí 19, 15, 13, 11. To zodpovedá zoradeniu pôvodných čísel 95, 45, 26, 77.

Úloha 17. Robot na kopanie drahokamov

Kubo vyhrabal na povale robota. Teraz sa s ním hrá na podložke, ktorú vidíš na obrázku. Kubo vie zakaždým robotovi určiť jeden zo 4 smerov – nahor, nadol, doľava, doprava. Robot sa vydá týmto smerom, až kým narazí na prekážku naznačenú šedým políčkom. Popri tom celom bude robot zbierať smaragdy na políčkach. Koľko najviac smaragdov vie robot pozbierať?



<u>Výsledok:</u> 57
<u>Riešenie:</u> Vyznačme si, kam všade sa robot vie dostať (krúžky označujú políčka, na ktorých vie robot aj zastať):



Z tohto vidíme, že robot vie pozbierať všetky smaragdy, okrem dvoch, ktoré sme vyznačili modrou. Keďže všetkých smaragdov je 59, tak robot pozbiera najviac 59 - 2 = 57 smaragdov.

Úloha 18. Tomáš trápený testom

Tomáš vypĺňa test, ktorý pozostáva z 20 otázok. Je hodnotený nasledovne: za správnu odpoveď je 5 bodov, za nesprávnu odpoveď je - 1 bod a ak sa Tomáš rozhodne nezodpovedať, dostane za otázku 0 bodov. Tomáš v tomto teste získal 51 bodov. Koľko otázok sa Tomáš rozhodol nezodpovedať?

<u>Výsledok:</u> 5
<u>Riešenie:</u> Keby Tomáš odpovedal správne na najviac 10 otázok, získal by najviac 5 · 10 = 50 bodov. Takže Tomáš musel správne zodpovedať aspoň 11 otázok. Ďalej si všimnime, že keďže za správnu odpoveď je 5 bodov, tak počet Tomášových bodov za správne odpovede bude násobkom 5. Tým pádom však musí končiť cifrou 0 alebo 5. Celkový počet Tomášových bodov sa ale končí cifrou 1, takže Tomáš musel nesprávne zodpovedať aspoň 4 otázky.
Iný spôsob, ako mohla byť na konci cifra 1 je, ak by Tomáš nesprávne zodpovedal až 9 otázok. V takom prípade by musel za správne odpovede získať 51 + 9 = 60 bodov, na čo by potreboval 60 : 5 = 12 správnych odpovedí. Lenže potom by test musel obsahovať aspoň 9 + 12 = 21 otázok, čo už je priveľa. Preto Tomáš zvolil nesprávnu odpoveď 4-krát. Za správne odpovede teda získal 51 + 4 = 55 bodov, čiže správne zodpovedal 55 : 5 = 11 otázok. Ostatné otázky Tomáš nezodpovedal, takže nezodpovedal 20 - 4 - 11 = 5 otázok.

Úloha 19. Písanie po štvorci

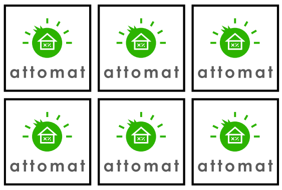
Stano píše po štvorci. Najprv na každý vrchol napíše nejaké prirodzené číslo, pričom čísla sa môžu aj opakovať. Potom na každú stranu napíše súčet čísel napísaných v jej dvoch koncových vrcholoch. Napokon do stredu štvorca napíše súčet čísel na všetkých štyroch stranách. Takto dostal číslo 72. Aký je súčet čísel napísaných na vrcholoch?

<u>Výsledok:</u> 36
<u>Riešenie:</u> Vyberme si jedno číslo vo vrchole štvorca a pozrime sa, kam a ako sa započítava. Z tohto vrcholu vychádzajú 2 strany, takže toto číslo sa použije v 2 stranách. Všetky strany potom sčítame, takže číslo z vrcholu prispeje k číslu v strede štvorca svojim 2-násobkom. Toto platí pre ľubovoľný vrchol. Stanov súčet preto musí byť dvojnásobkom súčtu čísel na vrcholoch. Preto musí byť súčet čísel na vrcholoch 72 : 2 = 36.

Úloha 20. Pexeso

Majo sa hrá pexeso. Má 6 kartičiek, na ktorých sú 3 dvojice rovnakých obrázkov. Z opačnej strany sú všetky kartičky rovnaké. Majo tieto kartičky zamiešal a rozložil na stôl ako na obrázku, pričom na každej kartičke bolo vidno stranu s obrázkom, ktorú majú všetky kartičky rovnakú. Potom začal otáčať kartičky nasledovne: vždy otočí jednu kartičku, pozrie sa na ňu a podľa toho otočí druhú kartičku. Ak sú na kartičkách rovnaké obrázky, vezme si obe kartičky. Ak sú na kartičkách rôzne obrázky, otočí obe kartičky naspäť.

Majo teraz bude otáčať kartičky najlepšie, ako sa dá. Najviac koľkokrát bude Majo musieť otočiť nejakú kartičku, aj keď bude kartičky otáčať v (pre neho) najhoršom možnom poradí?



Poznámka: Majo má veľmi dobrú pamäť, takže si pamätá, ako sú rozložené kartičky, ktoré už niekedy otočil.

Výsledok: 10
Riešenie: Povedzme si napríklad, že jednotlivé páry sú AA, BB a CC. Rozoberme prípady podľa toho, čo sa stane. Na začiatok Majo otočí 2 kartičky a sú dva prípady, čo sa môže stať – buď sú tieto dve kartičky z rovnakého, alebo z rôzneho páru.
Prípad 1. Ak sú otočené kartičky z rovnakého páru, napr. AA. V takomto prípade vezmeme tieto dve kartičky a pokračujeme. Ak opäť otočíme pár, napr. BB, tak potom vezmeme pár CC, na čo nám dokopy bude stačiť 6 otočení. Ak neotočíme pár, tak otočíme kartičky BC. Ďalšie otáčanie začneme otočením niečoho neznámeho. To bude buď B, alebo C. Podľa toho, čo otočíme, otočíme k tomu druhú kartičku z páru. Napokon vezmeme aj zvyšný pár. Dokopy na to budeme potrebovať 8 otočení kartičiek.
Prípad 2. Ak sú otočené kartičky z rôznych párov, napr. AB. V tomto prípade sa ďalšie otočenie začne otočením nejakej kartičky, o ktorej nič nevieme. Môžu sa stať dve veci, na základe ktorých opäť rozlíšme prípady.
Prípad 2.1. Ak je otočená kartička A alebo B. Povedzme napríklad, že sme otočili kartičku A. V takom prípade rovno vezmeme pár AA. Ďalej začneme otočením nejakej neznámej kartičky. Ak otočíme B, tak vezmeme pár BB a následne pár CC, čo nám dokopy zaberie 8 otočení. Ak však otočíme C, tak nám nezostáva nič iné, ako otočiť ďalšiu neznámu kartičku. V tom momente budeme mať informáciu o všetkých kartičkách (vieme si domyslieť, čo je posledná neotočená kartička), a tak postupne vezmeme oba zostávajúce páry – spolu potrebujeme 8 otočení.
Prípad 2.2. Ak je otočená kartička C. Keďže máme otočenú jednu kartičku z každého páru, nemáme na výber nič iné, ako otočiť ďalšiu neznámu kartičku. Ak je to kartička C, tak sme v podstate v rovnakom prípade ako v prípade 1 po zobratí páru AA a otočení BC (len teraz máme pár CC a otočené AB) – takže potrebujeme 8 otočení. Ak je to však niektorá z kartičiek A alebo B, povedzme, že A, tak ju musíme otočiť naspäť. Na zobratie páru AA použijeme ďalšie dve otočenia až potom sa dostaneme do situácie z prípadu 1 (tentoraz aj s rovnakými písmenkami). V tomto prípade tak budeme potrebovať použiť až 10 otočení.
Po rozobratí jednotlivých prípadov, čo sa môže stať, vidíme, že „najhoršia možnosť" pre Maja si vyžaduje až 10 otočení.