attomat

17.09.2024

Vzorové riešenia

Kategórie 7, 8, 9, Sekunda, Tercia, Kvarta, Open

p-mat

Úloha 01. Padajúca úloha

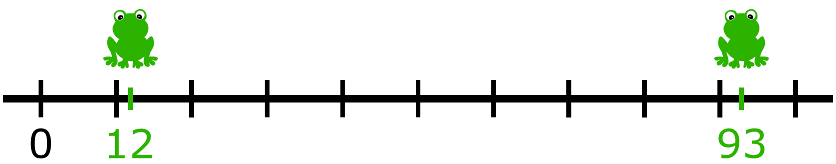
Anička hodila dvomi klasickými hracími kockami. Na nich sú čísla od 1 do 6, každé presne raz. Ktorá z týchto situácií mohla nastať?

a) Súčet čísel, ktoré padli, je 1.
b) Súčin čísel, ktoré padli, je 1.
c) Súčet čísel, ktoré padli, je 13.
d) Súčin čísel, ktoré padli, je 13.

Výsledok: b)
Riešenie: Pozrime sa na každú možnosť a zamyslime sa nad tým, či takýto stav mohol nastať.
a) Najnižšie čísla, aké môžeme na oboch kockách hodiť sú jednotky. Preto najmenší možný súčet na dvoch kockách je 1 + 1 = 2. To znamená, že súčet 1 sa nedá dosiahnuť.
b) Keď hodíme dve jednotky, ich súčin je 1 · 1 = 1. Táto možnosť je správna.
c) Najväčšie čísla, aké dokážeme na oboch kockách získať sú šestky. To znamená, že najväčší možný súčet je 6 + 6 = 12. Súčet 13 preto nie je možný.
d) Keď sa chvíľu pohráme s číslom 13 a skúsime ho vydeliť všetkými číslami od 1 do 13, zistíme, že jediné, čo ho delia bezo zvyšku sú práve čísla 1 a 13. To znamená, že takýto súčin by sme vedeli dostať jedine ako 1 · 13 = 13. Trinástku na kocke hodiť nedokážeme, preto táto možnosť nie je správna. Správna je teda odpoveď b).

Úloha 02. Žabka, hop!

Dve žaby sedia na číselnej osi – jedna z nich na čísle 12, druhá na čísle 93. Vtom Mišo začne tlieskať a na každé tlesknutie žaby skočia. Každá zo žiab skáče smerom k druhej žabe a vždy skočí o tretinu vzdialenosti smerom k druhej žabe. Mišo takto tleskol trikrát. Na ktorom čísle momentálne stojí žaba, ktorá začínala na čísle 93?



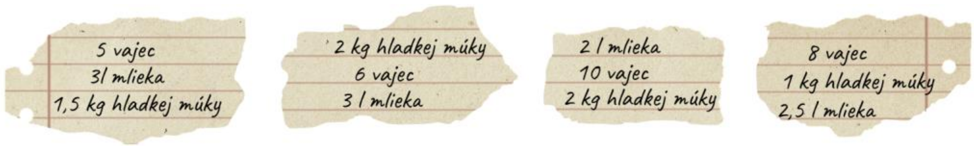
Výsledok: 54
Riešenie: Na začiatku sú žaby od seba vzdialené 93 - 12 = 81. Tretina tejto vzdialenosti je 81 : 3 = 27. Po prvom Mišovom tlesknutí tak ľavá žaba skočí doprava na číslo 12 + 27 = 39 a pravá žaba skočí doľava na číslo 93 - 27 = 66.
Teraz je vzdialenosť medzi žabami 66 - 39 = 27, z čoho tretina je 27 : 3 = 9. Po druhom tlesknutí tak ľavá žaba skočí na číslo 39 + 9 = 48 a pravá žaba na číslo 66 - 9 = 57.
Medzi žabami zostáva vzdialenosť 57 - 48 = 9, z čoho tretina je 9 : 3 = 3. Po treťom tlesknutí tak ľavá žaba skončí na čísle 48 + 3 = 51 a pravá žaba na čísle 57 - 3 = 54.
Žaba, ktorá začínala na čísle 93, teda po troch tlesknutiach skončí na čísle 54.

Úloha 03. Palacinky

Vedúci P-matu si na chate varili palacinky. Kubo pritom na internete našiel recept, podľa ktorého na 10 palaciniek potrebuje nasledovné suroviny:

– 400 ml mlieka,
– 200 g hladkej múky,
– 1 vajce.

Hladných krkov na chate je však viac, a tak sa Kubo rozhodol spraviť 55 palaciniek. Napísal preto, koľko čoho treba nakúpiť aj s rezervou. V ktorej z nasledujúcich možností je nákupný zoznam, z ktorého sa dá spraviť 55 palaciniek?

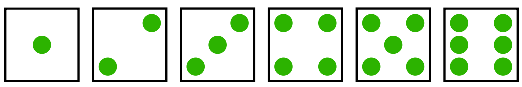


a) b) c) d)

Výsledok: b)
Riešenie: Spočítajme si, aké množstvo surovín potrebujeme na 55 palaciniek. Na to najprv spočítajme, aké množstvo surovín potrebujeme na 5 palaciniek. To je polovica 10 palaciniek, takže potrebujeme aj polovičné množstvá, teda 400 ml : 2 = 200 ml mlieka, 200 g : 2 = 100 g hladkej múky a polovicu vajíčka. Keďže 55 palaciniek je 11-krát viac ako 5 palaciniek, potrebujeme na ne 11-krát väčšie množstvo surovín, čiže 11 · 200 ml = 2200 ml = 2,2 l mlieka, 11 · 100 g = 1100 g = 1,1 kg hladkej múky a 11 polovíc, čiže 5 a pol vajíčka.
Teraz sa pozrime na jednotlivé nákupné zoznamy. V možnosti a) máme málo vajíčok (iba 5), v možnosti c) máme málo mlieka (iba 2 litre) a v možnosti d) máme málo hladkej múky (iba 1 kilogram). Jedine v možnosti b) máme dostatočne veľa všetkého. Správny nákupný zoznam je tak v možnosti b).

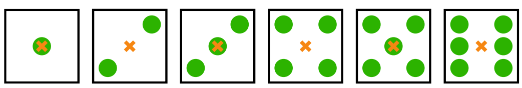
Úloha 04. Súmerná kocka

Šimona zaujala úplne klasická hracia kocka. Na obrázku vidíte, ako zvyčajne vyzerá rozloženie bodiek na jednotlivých stenách hracej kocky. Šimona zaujalo, že bodky sú na kocke vždy stredovo súmerné, ale nie je to vždy podľa stredu niektorej bodky. Ktoré všetky z týchto hodnôt sú stredovo súmerné podľa stredu niektorej svojej bodky?



Poznámka: Pozor: Viac odpovedí môže byť správnych!

Výsledok: 1; 3; 5
Riešenie: Vyznačme si, kde sa nachádza stred súmernosti každej strany kocky:



Z toho už poľahky určíme, že iba hodnoty 1, 3 a 5 majú stred súmernosti v strede niektorej bodky.
Poznámka: Nie je náhoda, že vyšli iba nepárne hodnoty. Všetky bodky na kocke sa totiž musia popárovať a v stredovej súmernosti sa zobraziť na seba navzájom. Výnimkou je tá, ktorej stred bude stredom súmernosti, lebo tá sa vie zobraziť sama na seba. Preto sa pre párne hodnoty všetky bodky popárujú a pre nepárne hodnoty sa popárujú všetky hodnoty okrem jednej, v ktorej strede bude stred súmernosti.

Úloha 05. Neznášam pondelky

Nina má vlastný systém hodnotenia toho, ako sa jej páčia dni v týždni. Jednotlivým dňom prideľuje alebo odoberá body podľa ňou určených kritérií. Tie sú:

1. ak je to deň víkendu... + 5 bodov
2. ak po ňom nasleduje deň víkendu... + 2 body
3. ak sa tento deň končí na písmeno „k“... - 3 body
4. ak je názov tohto dňa trojslabičné slovo... + 1 bod
5. ak je to pondelok... - 4 bodov

Zoraď dni týždňa podľa počtu pridelených bodov. Začni tým, ktoré má najviac bodov.

Výsledok: sobota; nedeľa; streda; piatok; utorok; štvrtok; pondelok
Riešenie: Pozrime sa postupne na každý deň v týždni a vyrátajme, koľko bodov im Nina pridelí:
Pondelok – spĺňa v poradí 3., 4. aj 5. kritérium. Počet bodov je - 3 + 1 - 4 = - 6.
Utorok – pre utorok platí 3. a 4. kritérium. Počet bodov: - 3 + 1 = - 2.
Streda – nespĺňa žiadne kritérium, počet bodov je 0.
Štvrtok – spĺňa iba 3. kritérium, počet bodov je - 3.
Piatok – pre piatok platí 2. a 3. kritérium. Nina mu udelí: 2 - 3 = - 1 bod.
Sobota – spĺňa 1., 2. a 4. kritérium, dostáva 5 + 2 + 1 = 8 bodov.
Nedeľa – spĺňa 1. a 4. kritérium, počet bodov má 5 + 1 = 6 bodov.

Keď dni zoradíme podľa počtu bodov od najväčšieho, dostávame výsledné poradie:
sobota, nedeľa, streda, piatok, utorok, štvrtok, pondelok.

Úloha 06. Katka sa vždy podelí

Katka má rada čísla s veľkými prvočíselnými deliteľmi. Ku každému číslu vždy dopočíta najväčšie prvočíslo, ktoré delí dané číslo. Napríklad pre číslo 60 platí 60 = 2 · 2 · 3 · 5, takže najväčšie prvočíslo, ktoré delí číslo 60, je prvočíslo 5. Preto Katka k číslu 60 dopočíta prvočíslo 5.

Potom Katka spravila to isté s číslami 51, 77, 91, 98. Zoraď tieto čísla podľa čísel, ktoré k nim Katka dopočítala – začni číslom, kde Katka dostala najväčšie prvočíslo.

Výsledok: 51; 91; 77; 98
Riešenie: Môžeme sa najskôr pozrieť postupne pre každé z daných čísel, ako ich vieme zapísať pomocou prvočísel.
Číslo 51 nie je deliteľné číslom 2, ale je deliteľné číslom 3. Platí 51 : 3 = 17, čo je tiež prvočíslo, teda číslo 51 vieme pomocou prvočísel zapísať ako 51 = 3 · 17.
Číslo 77 nie je deliteľné číslami 2, 3 ani 5, ale je deliteľné číslom 7. Platí 77 : 7 = 11, čo je tiež prvočíslo, a teda 77 = 7 · 11.
Číslo 91 nie je deliteľné číslami 2, 3 ani 5, ale tiež je deliteľné číslom 7. Platí 91 : 7 = 13, čo je znovu prvočíslo, a teda 91 = 7 · 13.
Číslo 98 je deliteľné číslom 2. Potom 98 : 2 = 49, čo ale nie je prvočíslo, pretože 49 vieme ešte zapísať ako 7 · 7, a teda 98 = 2 · 7 · 7.

Keď už máme každé z čísel zapísané ako súčin prvočísel, tak ich môžeme bez problémov zoradiť podľa najväčších prvočísel, ktoré ich delia: 51 (17), 91 (13), 77 (11) a 98 (7).

Úloha 07. Mlynček, var!

Stano si vytvoril mlynček na čísla. Keď doň Stano vloží nejaké číslo, z mlynčeka vyjde číslo podľa nasledovných pravidiel:
– mlynček najprv spočíta súčet cifier vloženého čísla,
– potom mlynček spočíta súčin cifier vloženého čísla,
– napokon mlynček napíše obe získané výsledky za seba, pričom najprv napíše súčet cifier.
Napríklad ak Stano vloží číslo 234, tak mlynček vráti číslo 924, keďže 2 + 3 + 4 = 9 a 2 · 3 · 4 = 24.

Stano do mlynčeka vložil nepárne dvojciferné číslo a z mlynčeka vyšlo číslo 1342. Aké nepárne dvojciferné číslo Stano vložil do mlynčeka?

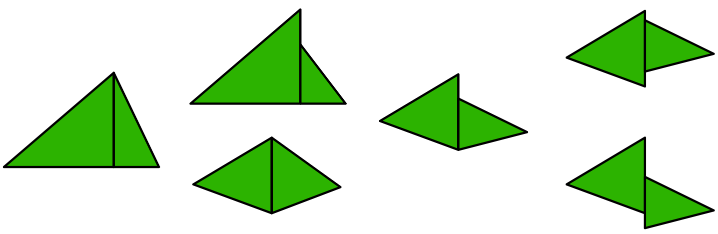
Výsledok: 67
Riešenie: Najprv si rozmyslime, ako správne rozdeliť číslo 1342 na dve čísla, z ktorých jedno bude súčet a druhé súčin cifier Stanovho čísla. Súčet cifier dvojciferného čísla bude určite aspoň 1 a najviac 18 (pre číslo 99). Do úvahy tak prichádzajú len dve možnosti:
1. súčet cifier je 1 a súčin cifier je 342,
2. súčet cifier je 13 a súčin cifier je 42.
Jediné dvojciferné číslo, ktorého súčet cifier je 1, je číslo 10. To však nemá súčin cifier 342 a tiež nie je nepárne. Správna možnosť je preto druhá možnosť.
Hľadáme teda nepárne dvojciferné číslo so súčtom cifier 13 a súčinom cifier 42. Súčet cifier 13 sa dosiahnuť iba tromi spôsobmi: 9 + 4, 8 + 5 a 7 + 6. V jednotlivých prípadoch dostávame súčin cifier 9 · 4 = 36, 8 · 5 = 40 a 7 · 6 = 42. Z toho vidíme, že Stanovo číslo obsahuje cifry 6 a 7. Z nich máme poskladať nepárne číslo, takže na mieste jednotiek musí byť cifra 7. Stano teda do mlynčeka vložil číslo 67.

Úloha 08. Strihám, strihᚠ, strihárne

Maťko rád strihá. Minule si z papiera vystrihol dva trojuholníky. Potom ich oba prilepil na papier tak, aby sa trojuholníky dotýkali, no neprekrývali. Potom spočítal počet strán vzniknutého útvaru. Ktoré z nasledujúcich čísel nemôže byť počtom strán vzniknutého útvaru?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) všetky predošlé počty sa dajú dosiahnuť

Výsledok: e)
Riešenie: Ukážeme, že všetky možnosti sa dajú dosiahnuť. Na to stačí nájsť príklady toho, kedy sa to stane. Niekedy na to máme aj viac možností:



a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

Vidíme teda, že všetky možnosti sa dajú dosiahnuť, takže správna odpoveď je e).

Úloha 09. Dátum ako číslo

Ivka má displej, na ktorom je každý deň napísaný aktuálny dátum. Napríklad dnes na ňom svieti 17.09.2024. Ivka však rada interpretuje dátum ako 8-ciferné číslo, čiže napríklad dnes je to číslo 17092024. Ivke sa nepáči, že toto číslo nie je deliteľné deviatimi. O koľko dní sa prvýkrát stane, že Ivkou prečítané 8-ciferné číslo bude deliteľné deviatimi?

Výsledok: 2
Riešenie: To, či je nejaké číslo deliteľné deviatimi, sa dá veľmi jednoducho zistiť. Stačí spočítať ciferný súčet toho čísla – ak je ciferný súčet deliteľný deviatimi, je aj číslo deliteľné deviatimi. (Platí to aj naopak – ak je nejaké číslo deliteľné deviatimi, tak aj jeho ciferný súčet).
Pre číslo 17092024 je ciferný súčet 1 + 7 + 0 + 9 + 2 + 0 + 2 + 4 = 25.
Na ďalší deň (18.09.2024) sa oproti predchádzajúcemu dňu vo výslednom 8-cifernom čísle zmenila cifra 7 na 8, a teda v tento deň bude ciferný súčet 25 + 1 = 26. To stále nie je deliteľné deviatimi, avšak keby sme ciferný súčet zväčšili o 1, bude to 27, čo deliteľné deviatimi je. To presne sa stane v nasledujúci deň, teda 19.09.2024.
Ivkou prečítané číslo bude deliteľné deviatimi najskôr o 2 dni.

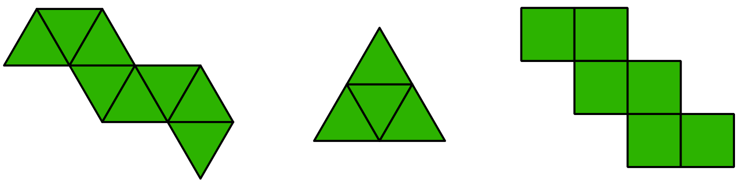
Úloha 10. Držať sa na kraji

Kika má záhradu tvaru obdĺžnika so šírkou 10 m. V jednom bode na jej obvode je bránka a v inom bode sú dvere do domu. Kika stojí pri bránke a chce po obvode záhrady prejsť k dverám do domu. Zistila, že to vie spraviť dvomi spôsobmi. Pri jednom z nich nakráča 24 m, pri druhom nakráča 28 m. Aká je dĺžka záhrady (druhého rozmeru obdĺžnika) v metroch?

Výsledok: 16
Riešenie: Ak by Kika prešla od bránky k dverám jednou z ciest a potom by prešla druhou z ciest zase od dverám k bránke, prešla by celý obvod záhrady. Obvod záhrady preto musí byť 24 m + 28 m = 52 m. Pritom dvakrát prejde dlhšiu stranu záhrady a dvakrát kratšiu stranu. Dĺžka dlhšej strany záhrady preto musí byť (52 m - 2 · 10 m) : 2 = 16 m.

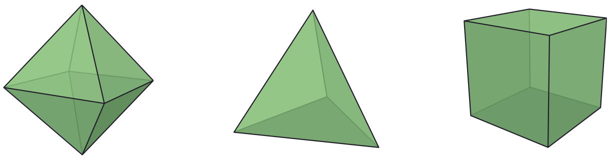
Úloha 11. Platonická láska k strihaniu

Miško rád vystrihuje. Minule sa k nemu dostalo niekoľko vystrihovačiek, ktoré sa po vystrihnutí dali poskladať na nejaké teleso. Tak ich Miško vystrihol a poskladal. Na ktorom z nasledujúcich obrázkov je vystrihovačka, z ktorej Miško dostane teleso s najviac vrcholmi?



a) b) c)

Výsledok: c)
Riešenie: Ak si útvary vystrihneme a poskladáme (alebo si skúsime predstaviť, čo také by sme mohli dostať), dostaneme v jednotlivých prípadoch telesá ako na týchto obrázkoch:

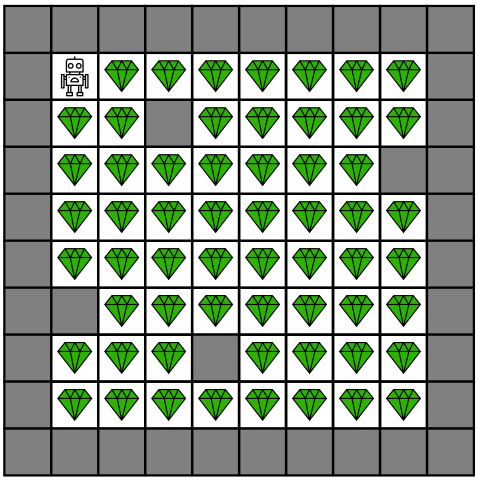


a) b) c)

Jedná sa postupne o pravidelný osemsten, pravidelný štvorsten a kocku (pravidelný šesťsten). Ľahko spočítame, že majú postupne 6, 4 a 8 vrcholov, takže najviac vrcholov má teleso na obrázku c).

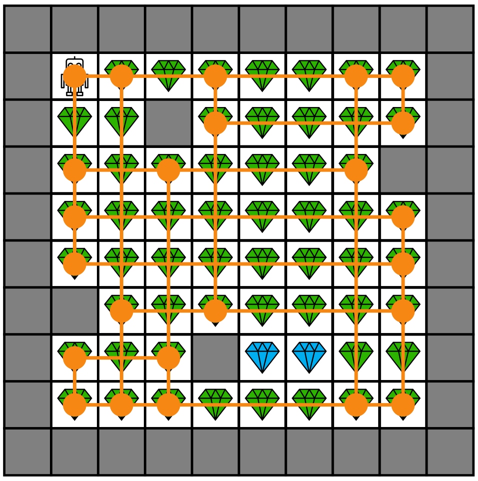
Úloha 12. Robot na kopanie drahokamov

Kubo vyhrabal na povale robota. Teraz sa s ním hrá na podložke, ktorú vidíš na obrázku. Kubo vie zakaždým robotovi určiť jeden zo 4 smerov – nahor, nadol, doľava, doprava. Robot sa vydá týmto smerom, až kým narazí na prekážku naznačenú šedým políčkom. Popri tom celom bude robot zbierať smaragdy na políčkach. Koľko najviac smaragdov vie robot pozbierať?



Výsledok: 57

Riešenie: Vyznačme si, kam všade sa robot vie dostať (krúžky označujú políčka, na ktorých vie robot aj zastať):



Z tohto vidíme, že robot vie pozbierať všetky smaragdy, okrem dvoch, ktoré sme vyznačili modrou. Keďže všetkých smaragdov je 59, tak robot pozbiera najviac 59 - 2 = 57 smaragdov.

Úloha 13. Dvojky a sedmičky

Janka má rada iba cifry 2 a 7. Preto skladá čísla, ktoré obsahujú iba tieto dve cifry. Cifru 7 má ale o trochu viac, a tak vyžaduje, aby počet cifier 7 v čísle bol o dva väčší ako počet cifier 2. Janka teraz rozmýšľa: Vie takýmto spôsobom dostať nejaké číslo, ktoré je násobkom čísla 27?

Výsledok: nie
Riešenie: Zdôvodníme, že také číslo neexistuje. Predpokladajme naopak, že by existovalo a dospejeme k niečomu, čo by nemohlo platiť. Majme teda nejaké číslo, čo spĺňa Jankine požiadavky. Je deliteľné číslom $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$, takže musí byť určite deliteľné aj číslom 3 (a aj 9). Kritérium pre deliteľnosť tromi nám hovorí, že aby bolo číslo deliteľné tromi, musí byť súčet cifier tohto čísla deliteľný číslom 3. Tak sa pozrime na súčet cifier.
Jankina požiadavka je, že počet cifier 7 v tomto čísle je o dva väčší ako počet cifier 2. Cifry v Jankinom čísle sú preto (v nejakom poradí) dve sedmičky a potom dvojky a sedmičky, ktoré sa dajú rozdeliť do párov. Každý pár dvojky a sedmičky sa do súčtu cifier započíta hodnotou 9. Navyše máme dve sedmičky, ktoré sa do súčtu cifier započítajú hodnotou $7 + 7 = 14$. Preto ak označíme n počet párov dvojky a sedmičky, tak súčet cifier Jankinho čísla je $14 + 9 \cdot n$. Už si len rozmyslime, že toto číslo nie je deliteľné číslom 3. Po vydelení dostaneme $(9 \cdot n + 14) : 3 = 3 \cdot n + 4$, zvyšok 2. Vyšiel nejaký zvyšok, a to znamená, že Janka nikdy nedostane žiadne číslo, ktoré by bolo deliteľné číslom 3, nie to ešte deliteľné číslom 27. Odpoveď je teda nie.

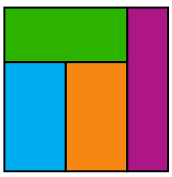
Úloha 14. Tomáš trápený testom

Tomáš vypĺňa test, ktorý pozostáva z 20 otázok. Je hodnotený nasledovne: za správnu odpoveď je 5 bodov, za nesprávnu odpoveď je - 1 bod a ak sa Tomáš rozhodne nezodpovedať, dostane za otázku 0 bodov. Tomáš v tomto teste získal 51 bodov. Koľko otázok sa Tomáš rozhodol nezodpovedať?

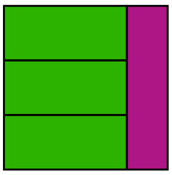
Výsledok: 5
Riešenie: Keby Tomáš odpovedal správne na najviac 10 otázok, získal by najviac $5 \cdot 10 = 50$ bodov. Takže Tomáš musel správne zodpovedať aspoň 11 otázok. Ďalej si všimnime, že keďže za správnu odpoveď je 5 bodov, tak počet Tomášových bodov za správne odpovede bude násobkom 5. Tým pádom však musí končiť cifrou 0 alebo 5. Celkový počet Tomášových bodov sa ale končí cifrou 1, takže Tomáš musel nesprávne zodpovedať aspoň 4 otázky.
Iný spôsob, ako mohla byť na konci cifra 1 je, ak by Tomáš nesprávne zodpovedal až 9 otázok. V takom prípade by musel za správne odpovede získať $51 + 9 = 60$ bodov, na čo by potreboval $60 : 5 = 12$ správnych odpovedí. Lenže potom by test musel obsahovať aspoň $9 + 12 = 21$ otázok, čo už je priveľa. Preto Tomáš zvolil nesprávnu odpoveď 4-krát. Za správne odpovede teda získal $51 + 4 = 55$ bodov, čiže správne zodpovedal $55 : 5 = 11$ otázok. Ostatné otázky Tomáš nezodpovedal, takže nezodpovedal $20 - 4 - 11 = 5$ otázok.

Úloha 15. Hodina kreslenia

Patrik si kreslí. Dnes si nakreslil štvorec a ten rozdelil na 4 časti. Každú z týchto častí zafarbil inou farbou, pričom na zafarbenie každej minul rovnako veľa farby. Patrikov výtvor vidíš na obrázku. Patrik potom zmeral, že dlhšia strana oranžového obdĺžnika má 6 cm. Koľko centimetrov meria obvod štvorca, ktorý Patrik nakreslil?



Výsledok: 36
Riešenie: Odmyslime si fialový obdĺžnik. Na modrý aj oranžový obdĺžnik minul Patrik rovnako veľa farby ako na zelený obdĺžnik. Na zelený obdĺžnik teda minul tretinu všetkej použitej farby na tieto tri obdĺžniky. Čiže zelený obdĺžnik zaberá tretinu obdĺžnika, ktorý sme dostali po odstránení fialového obdĺžnika. To znamená, že tento obdĺžnik vieme rozdeliť na 3 časti rovnakého tvaru ako zelený obdĺžnik. Po vrátení fialového obdĺžnika to vyzerá takto:



Z tohoto vidíme, že dlhšia strana oranžového obdĺžnika je rovnako dlhá ako dve kratšie strany zeleného obdĺžnika. Kratšia strana zeleného obdĺžnika je preto dlhá 6 cm : 2 = 3 cm. Z obrázka, že strana štvorca musí byť dlhá ako tri kratšie strany zeleného obdĺžnika, teda musí byť dlhá 3 · 3 cm = 9 cm. Obvod tohto štvorca je potom 4 · 9 cm = 36 cm.

Úloha 16. Nerozhodnosť

Šiesti spolužiaci Andrea, Beáta, Cecília, Denis, Emanuel a Filip sa majú postaviť do radu. Zistili, že to však môžu spraviť viacerými spôsobmi. Aby si to zjednodušili, napadlo im niekoľko pravidiel, podľa ktorých by sa mohli postaviť. Ktoré z týchto pravidiel zabezpečí, že budú mať najmenej možností toho, ako sa postaviť do radu?

a) Na začiatku radu musia byť dievčatá a až potom chlapci.
b) Beáta musí stáť na začiatku radu, ostatní môžu stáť ľubovoľne.
c) Dievčatá a chlapci sa v rade musia striedať.

Výsledok: a)
Riešenie: Pre každú z možností spočítajme, koľkými spôsobmi sa budú môcť spolužiaci postaviť do radu.
a) Pri umiestňovaní dievčat na začiatok radu máme 3 možnosti na to, ktorá bude prvá. Po určení prvého dievčaťa máme 2 možnosti na to, ktorá bude druhá. Potom zostane už iba 1 možnosť na to, ktoré dievča bude posledné. Dievčatá sa tak vedia zoradiť 3 · 2 · 1 = 6 spôsobmi. Rovnakým argumentom vieme zdôvodniť, že je 6 možných poradí chlapcov na štvrtom až šiestom mieste. Každé zoradenie dievčat vieme skombinovať s každým zoradením chlapcov. Spolu tak máme 6 · 6 = 36 možností zoradenia.
b) Počítame podobne ako v časti a). Beáta bude prvá, tam nemáme na výber. Potom však máme na druhom mieste na výber z 5 spolužiakov, potom na treťom mieste zo 4 spolužiakov, na štvrtom mieste z 3 spolužiakov, na piatom mieste z 2 spolužiakov a na poslednom mieste máme jednoznačne určeného spolužiaka. Dokopy tak máme 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120 možností.
c) Máme 2 možnosti podľa toho, či rad začína dievčaťom alebo chlapcom. Keďže sa musia striedať dievčatá a chlapci, sú potom pohlavia spolužiakov na jednotlivých miestach už dané. Preto keď sa pozrieme na pozície, kde sú dievčatá, tak sme v podobnej situácii ako v časti a) – tiež len určujeme, v akom poradí budú dievčatá stáť (akurát, že teraz nebudú stáť tesne za sebou). To dáva 6 možností. Podobne aj pre chlapcov máme 6 možností. Dokopy to dáva 2 · 6 · 6 = 72 možností.
Vidíme teda, že najmenej možností postavenia sa do radu majú v možnosti a), kedy majú „len“ 36 možností.

Úloha 17. Letná škola zaokrúhľovania

Matúš s Katkou sa učia zaokrúhľovať. Vždy si napíšu na papier nejaké trojciferné číslo a idú zaokrúhľovať. Matúš najprv toto číslo zaokrúhli na desiatky a potom výsledok zaokrúhli na tisícky. Katka číslo na papieri najprv zaokrúhli na stovky a potom výsledok zaokrúhli na tisícky. Matúš s Katkou zistili, že nie vždy dostanú rovnaký výsledok. Pre koľko rôznych trojciferných čísel sa stane, že Matúš s Katkou dostanú rôzne výsledky?

Výsledok: 45
Riešenie: Matúš s Katkou pracujú s trojciferným číslom. Obaja na konci zaokrúhľujú na tisícky, takže môžu dostať len dva výsledky – 0 a 1000. Pozrime sa, ktorý výsledok dostanú v závislosti od toho, s akým dvojciferným číslom začali.
Matúš pred zaokrúhľovaním na tisícky zaokrúhľuje na desiatky. V konečnom dôsledku zaokrúhli na 0 všetky čísla, ktoré sa po zaokrúhlení na desiatky zaokrúhlia na najviac 490. To spĺňajú čísla 100 až 494. Ostatné čísla, teda čísla 495 až 999 sa po zaokrúhlení na desiatky zaokrúhlia na číslo aspoň 500, takže sa potom zaokrúhlia na 1000.
Katka pred zaokrúhľovaním na tisícky zaokrúhľuje na stovky. Na 0 zaokrúhli všetky čísla, ktoré sa po zaokrúhlení na stovky zaokrúhlia na najviac 400. To spĺňajú čísla 100 až 449. Ostatné čísla, teda čísla 450 až 999 sa po zaokrúhlení na stovky zaokrúhlia na číslo aspoň 500, takže sa potom zaokrúhlia na 1000.
Matúšove a Katkine výsledky sa líšia pre čísla 450 až 494, kedy Matúš dostane výsledok 0, no Katka dostane výsledok 1000. To znamená, že Matúš s Katkou dostanú rôzne výsledky pre 45 dvojciferných čísel.

Úloha 18. Písanie po kocke

Stano píše po kocke. Najprv na každý vrchol napíše nejaké prirodzené číslo, pričom čísla sa môžu aj opakovať. Potom na každú hranu napíše súčet čísel napísaných v jej dvoch koncových vrcholoch. Potom na každú stenu napíše súčet čísel napísaných na štyroch hranách prislúchajúcich tejto stene. Napokon Stano sčíta čísla na všetkých stenách. Takto dostal číslo 240. Aký je súčet čísel napísaných na vrcholoch?

Výsledok: 40
Riešenie: Vyberme si jedno číslo vo vrchole kocky a pozrime sa, kam a ako sa započítava. Z tohto vrcholu vychádzajú 3 hrany, takže toto číslo sa použije v 3 hranách. Každá z týchto hrán prislúcha 2 stenám. Každé číslo na hrane sa tak použije v 2 stenách. Keďže číslo vo vrchole, s ktorým sme začali, sa použije v 3 hranách a každá z nich sa použije v 2 stenách, tak dokopy sa číslo vo vrchole použije v nejakej stene $3 \cdot 2 = 6$-krát (konkrétne 2-krát v každej stene, ktorej jeden z vrcholov je ten vrchol, s ktorým sme začali). Na konci sčítame všetky čísla na všetkých stenách, a preto sa do celkového Stanovho súčtu vrchol, s ktorým sme začali, započíta 6-krát.
Rovnako sa do Stanovho súčtu započíta 6-krát aj každý iný vrchol. Stanov súčet preto musí byť 6-krát väčší ako súčet čísel vo vrcholoch. Súčet čísel vo vrcholoch je preto $240 : 6 = 40$.

Úloha 19. Riaditeľka slniečko

Renka sa usmieva ako slniečko. Preto si vymyslela novú počtovú operáciu, ktorú bude označovať ☼. Pre ľubovoľné dve čísla x, y sa x ☼ y vypočíta nasledovne: x ☼ y = x · y - x + y. Teda napríklad 6 ☼ 4 = 6 · 4 - 6 + 4 = 24 - 2 = 22. Ihneď sa podujala spočítať niečo komplikované. Aké číslo dostane Renka, keď spočíta (((((((10 ☼ 9) ☼ 8) ☼ 7) ☼ 6) ☼ 5) ☼ 4) ☼ 3) ☼ 2) ☼ 1?

Výsledok: 1

Riešenie: Keby sa pustíme do postupného počítania, dostali by sme rýchlo pomerne veľké čísla, ktoré by sa ťažko násobili. Všimnime si, že toto v skutočnosti robiť nemusíme. Konkrétne sa pozrime na to, čomu sa rovná x ☼ 1 pre ľubovoľné číslo x. V takom prípade máme x ☼ $1 = x \cdot 1 - x + 1 = 1$. To platí aj v Renkinom prípade. Bez ohľadu na to, čo na začiatku spočíta, na konci s týmto výsledkom spraví operáciu typu x ☼ 1. Tým dostane výsledok 1.

Úloha 20. Pexeso

Majo sa hrá pexeso. Má 36 kartičiek, na ktorých je 18 dvojíc rovnakých obrázkov. Z opačnej strany sú všetky kartičky rovnaké. Majo tieto kartičky zamiešal a rozložil na stôl ako na obrázku, pričom na každej kartičke bolo vidno stranu s obrázkom, ktorú majú všetky kartičky rovnakú. Potom začal otáčať kartičky nasledovne: vždy otočí jednu kartičku, pozrie sa na ňu a podľa toho otočí druhú kartičku. Ak sú na kartičkách rovnaké obrázky, vezme si obe kartičky. Ak sú na kartičkách rôzne obrázky, otočí obe kartičky naspäť.

Majo teraz bude otáčať kartičky najlepšie, ako sa dá. Najviac koľkokrát bude Majo musieť otočiť nejakú kartičku, aj keď bude kartičky otáčať v (pre neho) najhoršom možnom poradí?

Poznámka: Majo má veľmi dobrú pamäť, takže si pamätá, ako sú rozložené kartičky, ktoré už niekedy otočil.

Výsledok: 70

Riešenie: Ukážeme, že nech sa Majo snaží akokoľvek, môže sa mu stať, že bude potrebovať otočiť kartičky až 70-krát. Na to najprv ukážeme, ako vie Majo zaručiť, že sa mu to na 70 otočení podarí. Potom ukážeme, že menej otočení nemusí nestačilo.

Časť 1. 70 otočení stačí. Majo zvolí nasledovnú stratégiu: Na začiatku otočí ľubovoľné dve kartičky. Potom už otáča tak, že ak vie o nejakom páre, tak ho hneď vezme. Inak začne otáčanie kartičkou, ktorú ešte nikdy neotočil – ak už niekedy videl kartičku s rovnakou druhou stranou, tak vezme celý pár; inak otočí ešte nejakú ďalšiu kartičku, o ktorej ešte nič nevie.

Ukážeme, že takto Majo použije najviac 70 otočení. Najprv si všimnime, že každú kartičku otočíme najviac 2-krát. Prvýkrát ju otočíme, keď o nej ešte nič nevieme. Buď ju po tomto prvom raze rovno vezmeme spolu s jej párom, alebo v horšom prípade musíme túto kartičku otočiť ešte druhýkrát, keď ju budeme brať spolu s jej párom. Takže skutočne každú kartičku otočíme najviac dvakrát.

Ďalej sa pozrime na kartičku, ktorú otočíme „ako poslednú“ – t.j. kartičku, ktorej prvé otočenie nastane najneskôr. Ukážeme, že túto kartičku vezmeme spolu s jej párom hneď pri prvom otočení. Ako totiž vyzeralo otáčanie, keď toto prvé otočenie nastalo? Prvá možnosť je, že táto kartička bola otočená ako prvá. V tom prípade ale vieme o všetkých ostatných kartičkách, takže rovno zoberieme pár k tejto kartičke. Druhá možnosť je, že otáčanie začalo otočením inej, konkrétne „predposlednej“ kartičky. V takom prípade však Majo vie, čo je na poslednej kartičke (to, čomu ešte chýba pár). Takže ak predposledná kartička netvorí pár s poslednou kartičkou, tak Majo pri otočení predposlednej kartičky vezme túto kartičku s jej párom (čím sa nedostaneme do možnosti, že nastalo otočenie poslednej kartičky). Alebo predposledná kartička tvorí pár s poslednou, a tak ich Majo obe vezme. Dôležité však je len to, že posledná kartička skutočne bude otočená iba raz.

Keď to dáme dokopy, tak každá kartička bude otočená najviac 2-krát, čiže potrebujeme najviac $2 \cdot 36 = 72$ otočení. Lenže posledná kartička bude otočená iba raz, čo dáva najviac $72 - 1 = 71$ otočení. Posledný dielik skladačky je, že otáčanie vždy skončí po párnom počte otočení (vždy otočíme dve kartičky a niečo sa stane). Najbližšie párne číslo menšie ako 71 je číslo 70. Takže touto stratégiou Majovi bude skutočne stačiť 70 otočení.

<u>Časť 2.</u> Na menej ako 70 otočení sa to nemusí podariť. Vieme informácie z predošlej časti. Z toho vidíme, že nám prakticky stačí zabezpečiť, že všetky kartičky sa otočia 2-krát, okrem dvoch. A keďže sme v časti, kde hľadáme „najhorší prípad“ pre Maja, tak v tejto časti vieme ovplyvňovať, v akom poradí Majo uvidí kartičky.

Určite môže nastať prípad, keď sa Majovi stane nasledovné: Na začiatku otočí 2 kartičky z rôznych párov. Potom vždy, keď Majo otáča kartičky, tak prvú kartičku otočí z páru, ktorý ešte nevidel, a druhú kartičku z páru, ktorý už videl (ale iného ako toho, z ktorého je prvá otočená kartička). Tým sa zabezpečí, že každá z týchto kartičiek bude otočená aspoň dvakrát. Toto sa môže diať, kým existujú páry, z ktorých sme nevideli žiadnu kartičku. Keďže na začiatku vidíme kartičky z 2 nových párov, tak takéto otočenie môže nastať ešte $18 - 2 = 16$ ráz. Spolu s úvodnými dvomi kartami je do tohto zakomponovaných $2 + 2 \cdot 16 = 34$ kariet, ktoré sa tak musia otočiť aspoň $2 \cdot 34 = 68$ ráz. Zvyšné dve karty sa potrebujú otočiť každá aspoň raz. Dokopy tak Majo bude v tomto prípade potrebovať až $68 + 2 = 70$ otočení.

Tým sme ukázali, že Majo má stratégiu na 70 otočení a že menej otočení nemusí stačiť. Môžeme tak tvrdiť, že v najhoršom prípade Majo otočí nejakú kartičku 70-krát.