Ahojte,

držíte v rukách zbierku úloh a vzorových riešení Matboja 2025.
Matboj 2025 je matematická súťaž pre žiakov piateho až siedmeho ročníka základných škôl a prímy a sekundy osemročných gymnázií. Súťaž organizuje nezisková organizácia P-MAT, n. o. (organizátor korešpondenčných seminárov Pikomat, Pikofyz a Terabio).

Štvorčlenné tímy žiakov sú rozdelené do troch súťažných kategórií – 5, 6 a 7.
Súťaž prebieha 120 minút, počas ktorých sa súťažiaci snažia vyriešiť čo najviac úloh. Okrem toho dostanú za každú správne vyriešenú úlohu jeden ťah v strategickej hre. Konečné poradie tímov teda neovplyvňuje len počet vyriešených úloh, ale aj to, ako dobre sa im v tejto hre darilo.

Táto súťaž je zameraná na zlepšenie logického myslenia, matematického uvažovania a práce v tíme, no predovšetkým na možnosť objaviť radosť z matematiky. Vytvorili sme túto zbierku úloh, aby žiaci, ktorých úlohy zaujali, mali možnosť znova si ich prериešiť, poprípade si prečítali vzorové riešenia, z ktorých sa dá veľmi veľa naučiť, aj keď úlohu vyriešili správne. Taktiež môže slúžiť ako inšpirácia pre učiteľov na čerpanie netradičnejších úloh na hodiny matematiky.

Želáme Vám príjemné riešenie a veľa nových poznatkov!

Vaši organizátori

Úloha 01. *Dominika veľmi rada pečie. Z minula jej zostal ešte jeden kúsok koláča a včera upiekla ďalší koláč, ktorý rozdelila na 15 kúskov. Doma dnes na raňajky 5 kúskov zjedla a v škole rozdala 8 kúskov spolužiakom. Koľko kúskov koláča zostalo Dominike?*

Výsledok: 3
Riešenie: Pred raňajkami mala Dominika 1 + 15 = 16 kúskov koláča. Keď doma na raňajky zjedla 5 kúskov a v škole dala 8 kúskov spolužiakom, dokopy jej ubudlo 5 + 8 = 13 kúskov. Dominike teda zostali 16 - 13 = 3 kúsky koláča.

Úloha 02. *Patrik sa s kamarátmi hral hru: hodí dvoma kockami a oni si majú tipnúť súčet čísel, čo hodil. Avšak po chvíli ich to omrzelo, tak Patrikovi napadlo – čo tak použiť 20-stenné kocky? To sú také, čo majú na stenách čísla od 1 do 20. Koľko rôznych súčtov čísel, ktoré padnú na kockách, môže Patrik dostať, keď hodí dvomi takýmito 20-stennými kockami?*

Výsledok: 39
Riešenie: Pozrime sa na najmenší a najväčší súčet, čo môžeme dosiahnuť. Najmenej je to 2 (ako 1 + 1) a najviac 40 (ako 20 + 20). Čísel od 2 do 40 je práve 39, takže určite nevieme dosiahnuť viac súčtov, lebo to by sme museli prekročiť maximum alebo minimum, čo nemôžeme. Vieme však dostať všetky tieto súčty? Áno – čísla od 1 po 21 dostaneme napríklad keď na prvej kocke hodíme 1 a na druhej postupne 1 až 20, čísla od 21 po 40 dostaneme napríklad keď na jednej kocke hodíme 20 a na druhej postupne 1 až 20. Takže vieme dostať všetky súčty od 2 po 40, teda ich je 39 rôznych.

Úloha 03. *Mirko má rád dvojciferné čísla, ktorých cifra na mieste desiatok je o 2 väčšia ako cifra na mieste jednotiek. Pritom Anička má rada dvojciferné čísla, ktorých cifra na mieste desiatok je 2-krát väčšia ako cifra na mieste jednotiek. Ktoré dvojciferné číslo majú radi obaja?*

Výsledok: 42
Riešenie: Čísla, ktoré má Mirko rád, zistíme tak, že k cifre na mieste jednotiek pripočítame 2 a získame tak cifru na mieste desiatok. Napríklad 0 + 2 = 2, z čoho dostaneme číslo 20. Takto získame čísla, ktoré má Mirko rád: 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97. Podobne zo zadania vieme zistiť čísla, ktoré má rada Anička, a to sú 21, 42, 63, 84. Z toho vidíme, že jediné spoločné číslo je 42.
Poznámka: Mohli sme sa vyhnúť vypisovaniu čísel úvahou, že násobenie dvomi znamená, že sčítavame tie isté čísla, a teda na mieste jednotiek musí byť 2, lebo Mirko pripočíta 2.

Úloha 04. *Majo sa akurát hral so svojou novou drevenou kockou s hranou dĺžky 2 cm, keď v tom k nemu prišla Katka a nafarbila všetkých 12 hrán kocky na fialovo. Chvíľu sa spolu hrali s kockou, no spadla im na zem a rozbila sa na 8 menších kociek, pričom každá mala hranu dĺžky 1 cm. Koľko hrán na týchto menších kockách bolo teraz nafarbených na fialovo?*

Výsledok: 24
Riešenie: Na začiatku sme mali kocku s hranou 2 cm a tá sa rozbila na kocky s hranou 1 cm. To znamená že každá hrana sa rozdelila na dve polovice, teda na dve menšie hrany. Pôvodne sme mali nafarbených na fialovo 12 hrán, takže keď z každej hrany vzniknú dve menšie nafarbené hrany, bude ich $2 \cdot 12 = 24$.

Úloha 05. *Lucka si kúpila mlynček na čísla. Do mlynčeka sa hádžu dve čísla. Mlynček každé z nich zmenší o 4 a takto zmenšené čísla vynásobí. Výsledok potom vyjde z mlynčeka. Lucka raz do mlynčeka hodila dve čísla a na jej počudovanie z mlynčeka vyšlo číslo 0. Ktoré číslo určite bolo medzi číslami, ktoré Lucka hodila do mlynčeka?*

Výsledok: 4
Riešenie: Pozrime sa na to odzadu: keďže z mlynčeka vyšlo číslo 0, jedno zo zmenšených čísel, ktoré sa v mlynčeku násobili, muselo byť tiež 0. Čísla sa zmenšovali o 4, teda toto číslo bolo pred zmenšením o 4 väčšie. Keďže 0 + 4 = 4, tak medzi číslami, ktoré Lucka hodila do mlynčeka, bolo určite číslo 4.

Úloha 06. *Marcel znova zabudol kód od svojho mobilu. Pamätal si len, že to bolo šesťciferné číslo, pre ktoré platilo:*
– nezačínalo sa cifrou 0;
– prostredné dvojčíslie kódu bolo súčtom prvého a posledného dvojčíslia;
– prvé trojčíslie kódu bolo rovnaké ako posledné trojčíslie;
– kód mal na mieste jednotiek cifru 1.
Aký je Marcelov kód od mobilu?

Výsledok: 101101
Riešenie: Prvé trojčíslie kódu je rovnaké ako posledné trojčíslie. Posledné trojčíslie však má na mieste jednotiek cifru 1, a tak musí mať výsledný kód na mieste tisícok cifru 1. To však znamená, že prostredné dvojčíslie má na mieste desiatok cifru 1, takže prostredné dvojčíslie má hodnotu medzi 10 a 19. Toto prostredné dvojčíslie má byť súčtom prvého a posledného dvojčíslia. Prvé dvojčíslie však má určite hodnotu aspoň 10 (inak by kód začínal cifrou 0). Preto musí mať posledné dvojčíslie hodnotu menšiu ako 10, takže má na mieste desiatok cifru 0. Už vieme, že na mieste jednotiek má cifru 1, takže posledné dvojčíslie je 01.
Opäť využijeme, že prvé a posledné trojčíslie majú byť rovnaké – keďže cifra na mieste desiatok je 0, tak cifra na mieste desaťticícov musí tiež byť 0. Preto je prvé dvojčíslie 10, čo vedie na prostredné dvojčíslie 10 + 01 + 11. Marcelov kód od mobilu je teda 101101, ktorý spĺňa všetky podmienky zadania.

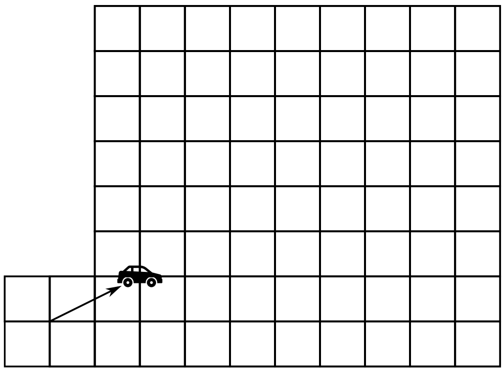
Úloha 07. *Nicol našla v obchode dokonalý pohár tvaru kvádra s výškou 10 cm. Nicol si všimla, že keď do pohára naleje 90 cm³ vody, tak výška hladiny v pohári stúpne o 5 cm (ak sa tým voda nepreleje cez okraj). Jedného dňa Nicol do prázdneho pohára naliala 126 cm³ vody. Aká je vzdialenosť medzi hladinou vody v pohári a okrajom pohára?*

Výsledok: 3 cm
Riešenie: Pohár je tvaru kvádra. Preto je výška, do ktorej stúpne hladina vody v pohári, priamo úmerná množstvu vody, ktoré do pohára nalejeme. Keďže na zdvihnutie hladiny o 5 cm treba 90 cm³ vody, tak na zdvihnutie hladiny o 1 cm treba 90 cm³ : 5 = 18 cm³ vody. Po naliatí 126 cm³ vody do pohára preto prilejeme týchto 18 cm³ presne 126 cm³ : 18 cm³ = 7-krát, takže voda v pohári siaha do výšky 7 cm od dna. Vzdialenosť medzi hladinou a okrajom pohára je preto 10 cm - 7 cm = 3 cm.

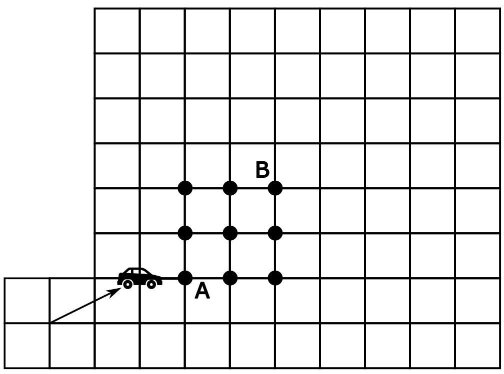
Úloha 08. *Timko našiel v zásuvke 4 kartičky – zelenú, žltú, modrú a červenú. Na každej kartičke bola napísaná nejaká cifra rôzna od 0 (cifry sa mohli aj opakovať). Timko si všimol, že*
– súčin cifry na zelenej kartičke a cifry na žltej kartičke je rovný cifre na zelenej kartičke,
– súčin cifry na žltej kartičke a cifry na modrej kartičke je rovný cifre na červenej kartičke,
– súčin cifry na červenej kartičke a cifry na modrej kartičke je dvojciferné číslo zapísané cifrou na zelenej kartičke a cifrou na žltej kartičke, pričom cifra zo zelenej kartičky je na mieste desiatok.
Aké cifry boli na kartičkách?

Výsledok: 1, 8, 9, 9
Riešenie: Pre jednoduchosť vysvetľovania budeme cifry nazývať podľa farby kartičiek – napríklad cifru na žltej kartičke budeme volať „žltá cifra“. Všimnime si, že súčin zelenej a žltej cifry je zelená cifra. Aby to platilo, žltá cifra musí byť 1.
Ak je súčin žltej a modrej cifry červená cifra a my vieme, že žltá cifra je 1, potom musí byť modrá cifra rovnaká ako červená cifra. Vieme, že súčin modrej a červenej cifry je dvojciferné číslo, ktoré má na mieste jednotiek žltú cifru, teda 1. Môžeme si skúsiť vypísať všetky súčiny dvoch tých istých cifier rôznych od 0. Zistíme, že 9 je jediná taká cifra, ktorá po vynásobení samou sebou bude dvojciferné číslo končiace sa jednotkou. Modrá a červená cifra sú teda 9. Keďže $9 \cdot 9 = 81$, zelená cifra je 8. Na kartičkách boli teda cifry 1, 8, 9, 9.

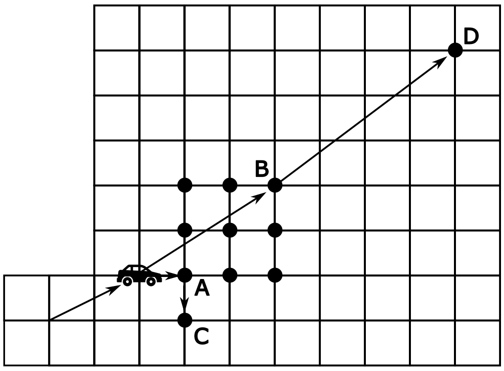
Úloha 09. *Zuzka šoféruje jedno z áut na dnešnom Rally. V tomto momente je na plániku na pozícii ako na obrázku. Na toto miesto sa dostala z miesta naznačeného na obrázku. Zuzka teraz spraví dva pohyby za sebou (oba za normálnu úlohu, nie vysvetľovaciu úlohu). Na koľkých rôznych miestach sa vie nachádzať po týchto dvoch pohnutiach?*



Výsledok: 49
Riešenie: Pozrime sa najprv, na ktorých miestach mohla Zuzka skončiť po prvom pohybe. Keďže aj vo vodorovnom aj v zvislom smere môže zmeniť svoj predošlý pohyb o 1 (alebo mínus 1), vznikne nám takýto štvorec možností:



Teraz by sme sa mohli rovnakým spôsobom zamerať na všetkých týchto 9 miest, zobrať ich za nové počiatočné miesta, pozrieť, kam sa z nich dá pohnúť a nakoniec len spočítať všetky finálne možnosti. Avšak vieme použiť aj menší trik.
Pozrime sa, kam by sa Zuzka dostala, keby čo najviac pridávala: teda pri oboch svojich pohyboch by k svojej rýchlosti v oboch smeroch pripočítavala 1. Potom by sa pri prvom pohybe pohla do bodu B, a pri druhom do bodu D (v obrázku nižšie). Teraz sa pozrime, kam by sa dostala, keby naopak od svojej rýchlosti v oboch smeroch vždy odpočítavala 1: potom by sa pri prvom pohybe pohla do bodu A a pri druhom do bodu C.



Keďže pri prvom prípade sme pri všetkých príležitostiach pripočítavali, vieme, že Zuzka nemohla skončiť vyššie ani viac napravo ako je bod D. Rovnako, pri druhej možnosti sme pri všetkých príležitostiach odpočítavali, teda Zuzka nemohla skončiť nižšie ani viac naľavo, ako je bod C. Z toho vyplýva, že možné miesta, kam sa mohla pohnúť nájdeme v štvorci ohraničenom bodmi C a D, ktoré sú jeho protiľahlými vrcholmi.
Všimneme si, že v tomto štvorci sa nachádza 7 miest na šírku aj na výšku, teda dokopy nám to dáva $7 \cdot 7 = 49$ možných miest.

Úloha 10. *Pizzéria pri Masívnom kaňone ponúka zákazníkom mať pizzu rozkrájanú na 8 alebo 10 častí. Leovi dnes už celkom vyhladlo, tak sa s niekoľkými kamarátmi dohodol, že po pretekoch sa pôjdu najesť do tejto pizzérie. Každý z nich si chce dať 2 kúsky pizze. Leo je však bystrý, a tak si všimol, že si nevedia navoliť počet pízz a ich rozkrájanie tak, aby každý mal presne dva kúsky a nič nezvýšilo. Taktiež si uvedomil, že ak by so sebou zobral o ľubovoľný počet kamarátov viac, už by to bolo možné. Koľko kamarátov (vrátane Lea) chcelo ísť do pizzérie?*

Výsledok: 11
Riešenie: Z pizze, ktorá je rozkrájaná na 8 kúskov, sa najedia 8 : 2 = 4 ľudia. Z pizze, ktorá je rozkrájaná na 10 kúskov sa naje 10 : 2 = 5 ľudí. Ak chceme, aby každý z kamarátov vrátane Lea dostal 2 kúsky a nič nezvýšilo, musí byť počet všetkých ľudí súčet niekoľkých čísel 4 a niekoľkých čísel 5. Vieme, že ak by Leo so sebou zobral aspoň o kamaráta navyše, už by sa to dalo. Musíme teda nájsť najväčší počet ľudí, ktorý sa nedá vyskladať ako súčet štvoriek a pätiek. Zároveň musí platiť, že akékoľvek väčšie číslo sa už vyskladať dá.
Ukážeme, že hľadaný počet ľudí je 11. Tento počet nevyskladáme – ak použijeme 0 pätiek, tak zvyšných $11 - 0 \cdot 5 = 11$ nie je násobok 4; ak použijeme 1 päťku, tak zvyšných $11 - 1 \cdot 5 = 6$ nie je násobok 4; ak použijeme 2 päťky, tak zvyšných $11 - 2 \cdot 5 = 1$ nie je násobok 4. Zároveň si vieme uvedomiť, že niekoľko najbližších čísel už vyskladáme:
$12 = 4 + 4 + 4$;
$13 = 5 + 4 + 4$;
$14 = 5 + 5 + 4$;
$15 = 5 + 5 + 5$.

Keď ku každej z týchto možností pridáme jednu štvorku, vyskladáme čísla od 16 do 19. Takýmto pridávaním štvoriek vyskladáme ľubovoľné väčšie čísla.
Dostali sme teda, že 11 nevyskladáme ako súčet štvoriek a pätiek, no ľubovoľné väčšie číslo už vyskladáme. Preto skutočne chcelo ísť do pizzérie 11 kamarátov.

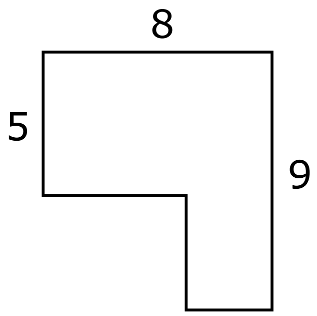
Úloha 11. *Stano sa rozhodol umyť 2 zaprášené autá, aby mali menší odpor vzduchu, a teda vedeli ísť rýchlejšie na najbližšom Rally. Tlačí ho čas a chce si vypočítať, koľko bude trvať umytie 2 áut. Posledný raz umyl jedno auto za 3 hodiny. Na pomoc si ešte zavolá Kaju a Alexa, ktorí umývajú rovnakou rýchlosťou ako Stano. Koľko hodín bude všetkým trom trvať umytie oboch áut?*

Výsledok: 2
Riešenie: Keď jednému trvá umytie auta 3 hodiny, tak 3 ľudom by trvalo umyť jedno auto 3 hodiny : 3 = 1 hodinu. Keďže pred Rally musia umyť 2 autá 3 ľudia, bude im to trvať 2 · 1 hodina = 2 hodiny.

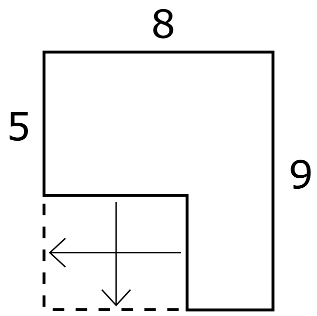
Úloha 12. *Kamaráti Radke pripravili úžasnú narodeninovú oslavu – okrem balónikov či koláčov na nej prirodzene nechýbala ani torta so sviečkami. Pri kupovaní sviečok na tortu však kamaráti nenašli čísla, ktoré by ukazovali Radkin vek, dali preto na tortu miesto toho čísla, ktoré ukázali Radkin dátum narodenia. Keď Radka sfukovala sviečky, zarazila sa: všimla si, že keď vynásobí čísla na torte (deň jej narodenia a číslo mesiaca, v ktorom sa narodila), dostane svoje obľúbené číslo! Ak je Radkine obľúbené číslo 144, v ktorých mesiacoch sa mohla narodiť?*

Výsledok: 6. , 8. , 9., 12. mesiac (jún, august, september, december)
Riešenie: Označme deň Radkinho narodenia D a mesiac, kedy sa narodila M. Nás zaujíma, aké hodnoty môže mať M.
Vieme, že 144 = D · M. To znamená, že môžeme skúšať deliť číslo 144 číslami mesiacov, a ako výsledok musíme dostať rozumné číslo D: keďže D má byť číslo dňa, musí to byť celé číslo a tiež nemôže byť väčšie ako počet dní v danom mesiaci.
Napríklad po delení 144 : 1 = 144 dostaneme D = 144, čo síce je celé číslo, ale január nemá 144 dní. Rovnakým spôsobom vylúčime aj február (2), marec (3) a apríl (4). Máj (5) vylúčime tiež, lebo 144 : 5 nám nedá celé číslo. Prvý mesiac, ktorý funguje, je tak jún (6), keďže 144 : 6 = 24, čo je v poriadku, keďže jún má viac ako 24 dní.
Takýmto spôsobom zistíme, že z nasledujúcich mesiacov budú fungovať aj august (8), september (9) a december (12), zatiaľ čo zvyšné mesiace nám nedajú celočíselný výsledok delenia. Radka sa teda mohla narodiť v mesiacoch s poradovými číslami 6, 8, 9 alebo 12.

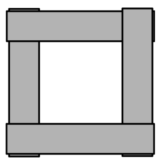
Úloha 13. *Katka chce po celom obvode domu zavesiť reťaz so svetielkami. Na papier si nakreslila pôdorys domu a už stihla odmerať aj dĺžky niektorých stien ako na obrázku. Akú dlhú reťaz so svetielkami bude celkovo potrebovať?*



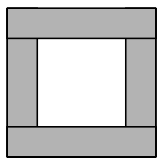
<u>Výsledok:</u> 34
<u>Riešenie:</u> Môžeme si všimnúť, že posunutím dvoch strán môžeme pôdorys upraviť na obdĺžnik. Potom už jednoducho vypočítame, že obvod je 2 · 8 m + 2 · 9 m = 34 m.



Úloha 14. *Ninka sa v škole často nudí, no baví ju vystrihovanie, preto si so sebou minule do školy priniesla nožničky. Zo svojho zošita nimi vystrihla 4 obdĺžniky, ktoré mali šírku 1 centimeter a obsah 5 centimetrov štvorcových. Chvíľku nevedela, čo s nimi, no potom v taške našla lepidlo a tak ich zlepila tak, ako vidíš na obrázku. Aký je obsah útvaru, ktorý zlepila, v centimetroch štvorcových?*



<u>Výsledok:</u> 16
<u>Riešenie:</u> Ak má jeden obdĺžnik obsah 5 cm² a šírku 1 cm, znamená to, že jeho dĺžka je 5 cm² : 1 cm = 5 cm. Potom vieme celý útvar jednoducho rozdeliť na 4 obdĺžniky, z ktorých dva majú dĺžku 5 cm a šírku 1 cm a dva majú dĺžku 3 cm a šírku 1 cm. Celkový obsah útvaru preto bude 2 · 5 cm² + 2 · 3 cm² = 16 cm².

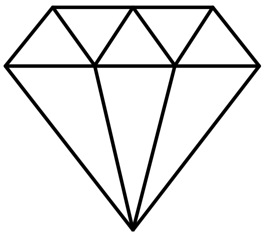


Úloha 15. *Stano sa strašne rád hrá s palindrómami. To sú také čísla, ktoré sú rovnaké, keď ich čítame spredu, ako keď ich čítame odzadu. Napríklad také číslo 12321 je päťciferný palindróm.*
Pri poslednej hre s palindrómami sa Stano zamyslel: Ktorý najmenší palindróm väčší ako 0 je súčasne násobkom čísel 1, 2, 3 a 4?

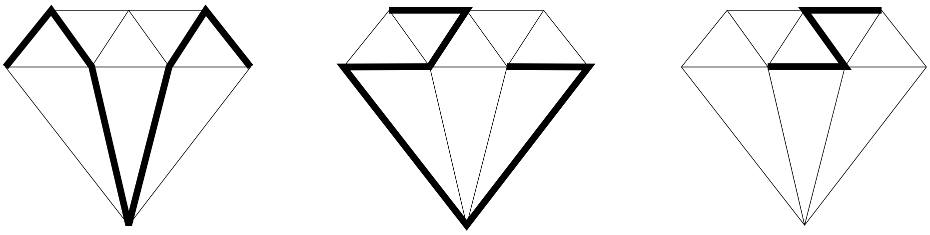
<u>Výsledok:</u> 252
<u>Riešenie:</u> Ak má číslo byť násobkom čísel 1, 2, 3 a 4, musí byť násobkom čísla 12. Môžeme si preto vypisovať násobky čísla 12, až kým nedostaneme nejaký palindróm. Takto si vypisujme čísla:
12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192, 204, 216, 228, 240, 252, ...
Číslo 252 je prvý násobok 12, ktorý je súčasne palindróm, takže odpoveď na Stanovu otázku je číslo 252.

Úloha 16. *Miško by chcel Ninke vyrobiť diamantový prsteň. Diamant sa vyrába kreslením útvaru na obrázku. Miško chce, aby bol vyrobený diamant naozaj pekný, preto neprechádza ceruzkou po tej istej čiare dvakrát, no zároveň chce diamant nakresliť na čo najmenej ťahov (chce teda čo najmenej krát zdvihnúť ceruzku z papiera). Koľko najmenej ťahov musí Miško spraviť?*

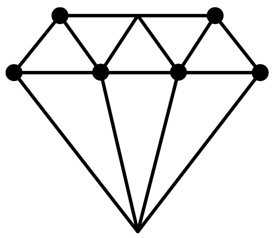
Výsledok: 3



Riešenie: Po chvíľke skúšania sa nám môže podariť nájsť nakreslenie diamantu na 3 ťahy. Napríklad takto:



Rozmyslime si, že na menej ťahov to nepôjde. Pozerajme sa na body, v ktorých sa stretávajú niektoré čiary. Ak v nejakom ťahu takýmto bodom len „prechádzame“, tak jednou čiarou doň vojdeme a druhou vyjdeme. Použijeme tým teda 2 čiary z tých, ktoré sa v tomto bode stretajú. Problém teda budeme mať v bodoch, v ktorých sa stretáva nepárny počet čiar. Aby sme ho vyriešili, tak v takomto bode musíme začať alebo skončiť nejaký ťah. Bodov, v ktorých sa stretáva nepárny počet čiar, je šesť – konkrétne tie vyznačené kruhom na tomto obrázku:
Musíme teda mať aspoň 6 začiatkov alebo koncov ťahov. Každý ťah použije dva z nich (každý ťah má svoj začiatok a koniec). Potrebujeme teda aspoň 6 : 2 = 3 ťahy.



Zdôvodnili sme teda, že potrebujeme aspoň 3 ťahy a že 3 ťahy stačia. Preto musí Miško spraviť najmenej 3 ťahy.

Úloha 17. *Maťko sa hrá so svojím obľúbeným nepárnym číslom. Jedného dňa si na papier napísal všetky kladné čísla, ktorými možno toto jeho obľúbené číslo vydeliť bezo zvyšku. Všetky čísla na papieri sčítal a dostal číslo 40. Ďalší deň sa pokúsil spraviť niečo podobné s dvojnásobkom svojho obľúbeného čísla. Aký súčet Maťko dostane, ak v tomto prípade sčíta všetky čísla na papieri?*

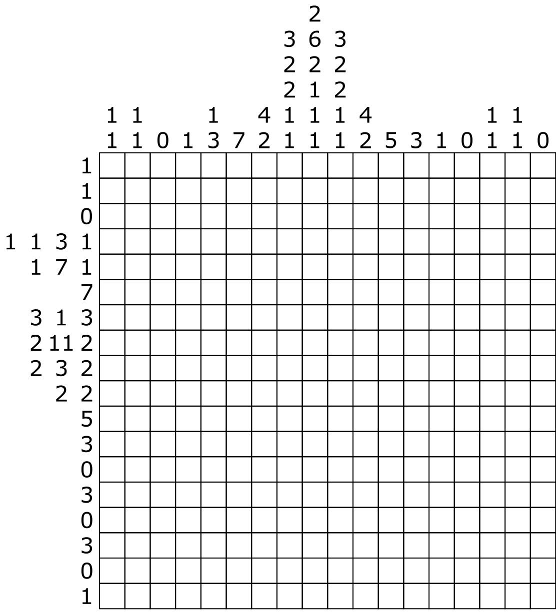
Výsledok: 120

<u>Riešenie:</u> Maťkovo obľúbené číslo je nepárne. Ak by ho vydelil nejakým párnym číslom, určite by dostal nejaký zvyšok. Všetky čísla na Maťkovom papieri z prvého dňa sú teda určite nepárne.
Teraz je kľúčové uvedomiť si nasledovnú vec: ak Maťkovo obľúbené číslo vynásobíme dvomi, tak na papier môžeme napísať aj dvojnásobky čísel, ktoré mal Maťko pôvodne na papieri. Pri príslušnom delení sa totiž tieto dvojky vykrátia a stále dostaneme podiel bezo zvyšku. Zároveň sa dá ľahko vidieť, že toto sú jediné čísla, ktoré pribudnú na Maťkovom papieri.
Preto každé z čísel na pôvodnom papieri, bude mať na druhom papieri svoj dvojnásobok. Pre každé z čísel na Maťkovom pôvodnom papieri tak do súčtu na druhom papieri započítame nielen dané číslo, ale aj jeho dvojnásobok. Dokopy teda započítame jeho trojnásobok. Zopakovaním tejto úvahy pre všetky čísla na Maťkovom pôvodnom papieri sa dozvedáme, že súčet čísel musí byť trojnásobný oproti pôvodnému súčtu. Musí teda byť $3 \cdot 40 = 120$.
Poznámka: Súčet zo zadania sa dá aj dosiahnuť, a to napríklad pre číslo 27, kedy sú na papieri čísla 1, 3, 9 a 27.

Úloha 18. *Janka sleduje semafor počas rannej dopravnej špičky. O 7:00 pri semafore nečaká žiadne auto a práve naskočila červená. K semaforu teraz prichádza auto každých 5 sekúnd. Každú minútu naskočí na chvíľku na semafore zelená, vďaka čomu sa kolóna zmenší o 10 áut. Takto pred semaforom vznikne zápcha. Po 8:00 sa však situácia zlepší a k semaforu prichádza auto už len každých 15 sekúnd. V akom čase sa rozpustí zápcha, čiže v akom čase sa prvýkrát znova stane, že pred semaforom nebude čakať žiadne auto?*

<u>Výsledok:</u> 8:20
<u>Riešenie:</u> Od 7:00 chodí k semaforu jedno auto za 5 sekúnd. Za jednu minútu k semaforu preto príde $60 : 5 = 12$ áut. Avšak, na zelenú, ktorá tiež naskočí každú minútu, stihne prejsť iba 10 áut, čo znamená, že od 7:00 pribudnú pred semaforom každú minútu $12 - 10 = 2$ autá. Za hodinu do 8:00 preto dokopy pribudne $60 \cdot 2 = 120$ áut, ktoré budú čakať pred semaforom. Od 8:00 však už auto príde len raz za 15 sekúnd, teda k semaforu za minútu pribudnú $60 : 15 = 4$ autá. Keďže na zelenú ich stále stihne prejsť 10, každú minútu teraz spred semaforu odbudne $10 - 4 = 6$ áut. Kým spred semaforu odbudne všetkých 120 áut, bude to teda trvať $120 : 6 = 20$ minút. Pred semaforom teda najbližšie nebude auto o 8:20.

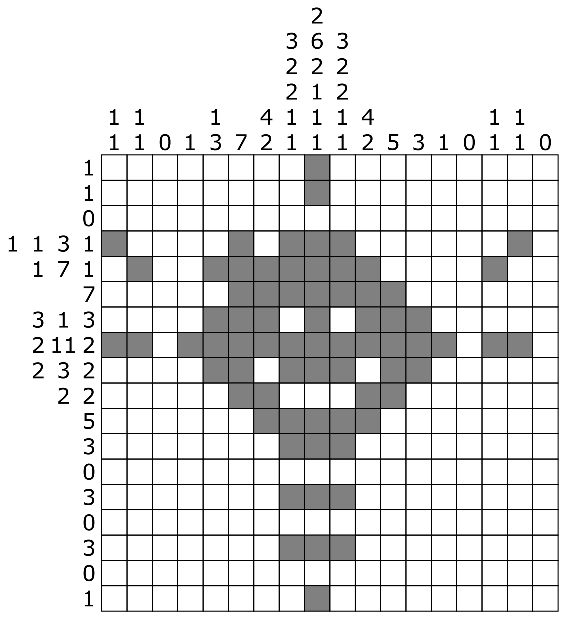
Úloha 19. *Kubko objavil na povale tabuľku ako na obrázku. Rýchlo sa dovtípil, že má vyfarbiť niektoré štvorčeky vnútri tabuľky. Má to spraviť tak, že čísla na začiatku riadku udávajú počty súvisle vyfarbených štvorčekov v danom riadku, pričom tieto skupiny musia byť v danom riadku v rovnakom poradí ako čísla. Medzi týmito súvisle vyfarbenými štvorčekmi má byť aspoň jeden nevyfarbený štvorček. Podobne to platí s číslami na začiatku stĺpcov. Kubko takto úspešne vyfarbil tabuľku. Koľko štvorčekov pri tom vyfarbil?*

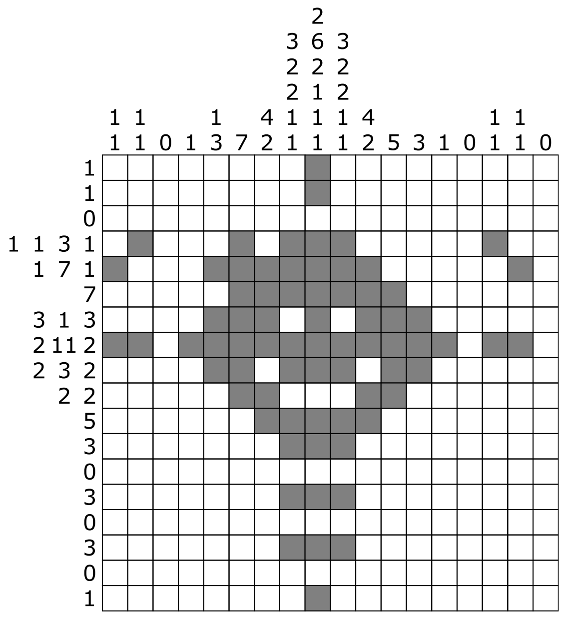


Výsledok: 72

Riešenie: Otázka sa nás pýta na počet štvorčekov bez ohľadu na ich polohu. Počty štvorčekov, ktoré sa majú zafarbiť, máme napísané na začiatku riadkov, resp. na začiatku stĺpcov. Takže nám stačí len sčítať všetky čísla na začiatku riadku (alebo na začiatku stĺpcov, keďže musíme dostať rovnaký výsledok). Po sčítaní čísel zistíme, že Kubko zafarbí 72 štvorčekov.

Poznámka: Štvorčeky sa dajú podľa pravidiel vyfarbiť dvomi spôsobmi:

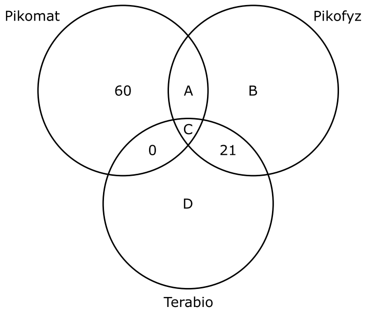




Úloha 20. *Túto sériu odovzdalo riešenia do seminárov Pikomatu, Pikofyzu a Terabia 142 žiakov, pričom každý žiak sa zapojil aspoň do jedného semináru. Túto sériu odovzdalo riešenia do Terabia 47 žiakov, do Pikofyzu 63 a do Pikomatu 80 žiakov. Žiakov, ktorí riešia aj Terabio aj Pikofyz, ale nie Pikomat, je 21. Neexistuje riešiteľ, ktorý by zároveň riešil Pikomat a Terabio, ale neriešil Pikofyz. Iba Pikomat rieši 60 žiakov. Koľko žiakov rieši Pikomat a Pikofyz, ale nerieši Terabio?*

Výsledok: 13

Riešenie: Schematicky si naznačme informácie zo zadania do nasledujúceho obrázku – každý kruh zodpovedá jednotlivým seminárom a v každej časti číslo (prípadne písmeno, ak danú informáciu nemáme) popisuje počet žiakov, ktorí riešia príslušnú kombináciu seminárov (napríklad číslo 60 zodpovedá tomu, že 60 riešiteľov rieši iba Pikomat; podobne písmeno C označuje, že všetky semináre rieši C žiakov):



Vieme, že Pikomat rieši 80 žiakov. Preto 80 = 60 + 0 + A + C, odkiaľ A + C = 20. Taktiež vieme, že iba Pikofyz rieši 63 žiakov, čo v reči písmen znamená A + B + C + 21 = 63. Keďže vieme, že A + C = 20, tak z tohto dostávame B = 63 - 21 - 20 = 22. Takže iba Pikofyz rieši 22 riešiteľov.

Ďalej si uvedomme, že celkový počet riešiteľov (142) vieme dostať ako 142 = 60 + 0 + A + C + 22 + 21 + D. Opäť využijeme, že A + C = 20, odkiaľ sa dozvieme, že D = 142 - 60 - 22 - 21 - 20 = 19. Takže iba Terabio rieši 19 riešiteľov.

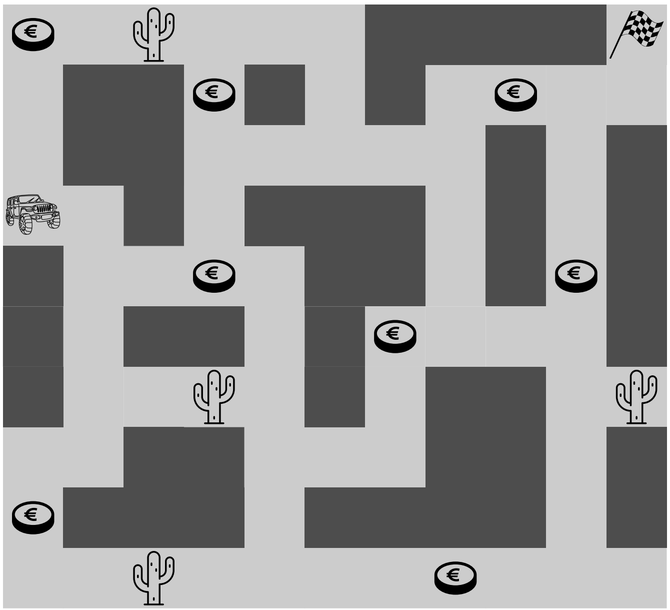
Ďalší krok je určiť C. Vieme, že Terabio rieši spolu 47 žiakov, takže 47 = 0 + 19 + 21 + C , takže C = 7. Všetky semináre teda rieši 7 žiakov. Napokon, z toho, že A + C = 20, sa dozvedáme A = 20 - 7 = 13. Takže počet riešiteľov, ktorí riešia Pikomat a Pikofyz, ale neriešia Terabio, je 13.

Úloha 21. *Palko si vytvára kartičky. Na kartičku vždy napíše dve čísla, jedno z každej strany kartičky. Robí to pritom tak, aby obe čísla na kartičke mali súčet 10. Palko si zobral 8 takýchto kartičiek a položil ich na stôl. Bolo na nich vidno čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8. Aký bol súčet čísel, ktoré na kartičkách nebolo vidno?*

Výsledok: 44

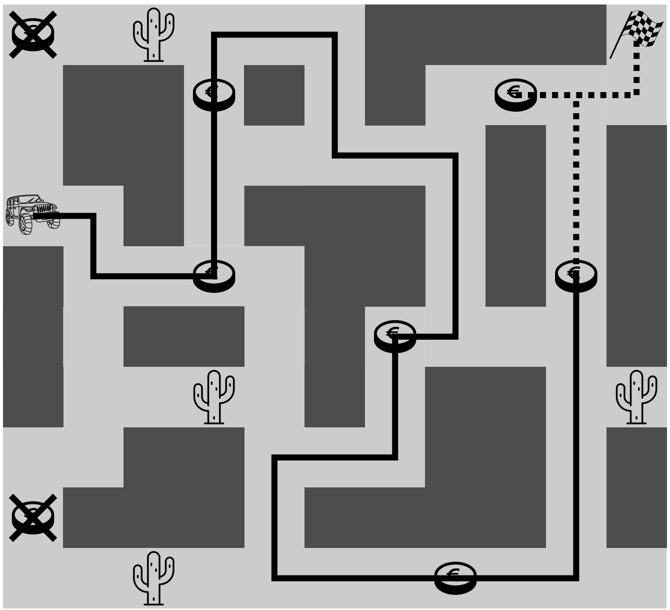
Riešenie: Vieme, že súčet čísel na oboch stranách kartičky je 10. Na každej strane kartičky, ktorú nevidíme, je teda rozdiel čísla 10 od čísla na druhej strany kartičky. Dopočítame si postupne druhé strany kartičiek: 10 - 1 = 9, 10 - 2 = 8, 10 - 3, ... , 10 - 8 = 2. Súčet čísel, ktoré nevidíme, bude teda 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 44.

Úloha 22. *Poslednou dobou sa dal pretekár Kubo na zbieranie mincí. Ale taký pretekár nemá veľa času na rozdávanie, a tak sa snaží robiť všetko efektívne. Koľko najviac mincí vie pretekár Kubo zobrať, ak nemôže dvakrát prejsť cez to isté políčko a musí skončiť v cieli? Taktiež pretekár Kubo nesmie ísť cez políčko s kaktusom, pretože by doň nabúral... Pretekár Kubo začína na políčku auta a snaží sa skončiť na políčku s vlajkou cieľa ako na obrázku.*



<u>Výsledok:</u> 5

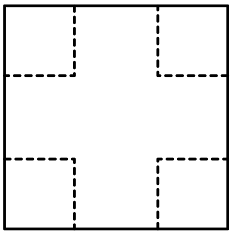
<u>Riešenie:</u> Cez prečiarknuté mince pretekár Kubo nemôže prejsť, lebo by nabúral do kaktusu. Do cieľa vedú iba dve cesty, ktoré sa spájajú v políčku (označené bodkovano) pred cieľom. Tým pádom pretekár nemôže zobrať mince na oboch cestách spojených v danom políčku, lebo by musel prejsť cez dané políčko dvakrát. Dokopy je mincí 8, cez 3 nemôže prejsť, teda správna odpoveď je 8 - 3 = 5 (trasu, ako by pretekár Kubo mohol ísť, vidíte na obrázku – najprv ide po plnej čiare a potom sa napojí na príslušnú bodkovanú).



Úloha 23. *Členovia pretekárskeho tímu Ambroseho si na narodeninovej oslave svojho člena Paľka všimli, že ani jeden z členov sa nenarodil v tom istom mesiaci. Koľko najviac narodeninových osláv môžu ešte tento rok chystať pre členov pretekárskeho tímu Ambroseho, ak Paľkovi už vystrojili oslavu?*

Výsledok: 11
Riešenie: Aby vystrojili čo najviac narodeninových osláv, tím musí mať čo najviac členov, teda každý člen sa musí narodiť v inom mesiaci. Teda tím Ambroseho môže mať najviac 12 členov. Keďže Paľkovi už vystrojili oslavu, tak najväčší počet osláv, ktoré môžu ešte vystrojiť, je 11.

Úloha 24. *Samko upiekol tortu tvaru štvorca. Potom z nej urezal niekoľko kúskov tvaru štvorca ako na obrázku. Dostal tým tortu tvaru dvanásťuholníka, ktorého každá strana mala rovnakú dĺžku. Keď ju zdobil po obvode, odmeral, že obvod tejto torty bol 48 cm. Aká bola dĺžka strany pôvodnej štvorcovej torty?*



Výsledok: 12 cm
Riešenie: Všimnime si, že odrezaním štvorcových kusov sa nezmení obvod torty. Každý štvorec totiž pôvodne do obvodu prispieval dvomi stranami naznačenými plnými čiarami, no po odrezaní prispieva dvomi čiarami naznačenými čiarkovanými čiarami. Tie však majú rovnakú dĺžku, takže obvod sa nezmení.
Vieme preto, že obvod pôvodného štvorca bol tiež 48 cm. Každá jeho strana tak mala dĺžku 48 cm : 4 = 12 cm.

Úloha 25. *Renka sa kedysi dávnejšie dozvedela, koľko presne obyvateľov má jej rodné mesto – bolo to päťciferné číslo. Toto číslo si zapísala na tabuľu, lebo tušila, že sa jej niekedy zíde – a mala pravdu! Dnes toto číslo potrebovala na domácu úlohu, tak sa išla pozrieť na tabuľu, no sklamane zistila, že posledné dvojčíslie tohto čísla sa z tabule zotrelo. Zostalo tam iba 969, teda cifra na mieste desiatok a jednotiek chýbala. Renka si pamätá, že číslo bolo násobkom čísla 25. Na papier (odkiaľ sa to už snáď nezotrie) si napísala všetky cifry, ktoré pôvodne mohli byť na mieste desiatok a vedľa toho všetky cifry, ktoré mohli pôvodne byť na mieste jednotiek. Aký je súčet cifier, ktoré Renka napísala na papier?*

Výsledok: 24
Riešenie: Pozrime sa na niekoľko prvých násobkov čísla 25. Tie sú:
25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, 275, 300, ...
Z toho môžeme usúdiť, že násobky 25 sa končia iba dvojčísliami 00, 25, 50, 75. Toto sú tak jediné dvojčísla, ktoré mohlo mať pôvodné Renkino číslo. Na papier si preto Renka napísala čísla 0, 0, 2, 5, 5, 0, 7, 5, ktorých súčet je 0 + 0 + 2 + 5 + 5 + 0 + 7 + 5 = 24.

Úloha 26. *Patrik sa hrá s kartičkami. Má 5 kartičiek, na ktorých má postupne napísané cifry 1, 2, 3, 4 a 5. Patrik z nich zložil číslo 12345 a nechal ho na stole. V tom mu do izby vošla mladšia sestra Ika a začala sa hrať s kartičkami. Najprv vymenila nejakú dvojicu susedných kartičiek. Následne vymenila inú dvojicu susediacich kartičiek. Napokon vymenila inú dvojicu susediacich kartičiek inú ako v predošlých výmenách. Takto dostala nejaké iné číslo. Aké najmenšie číslo takto mohla Ika vytvoriť?*

Výsledok: 12543
Riešenie: Aby sme dostali čo najmenšie číslo, musí mať výsledné číslo čo najmenšiu cifru v ráde desaťtisícov. Preto skúsme robiť výmeny tak, aby sme nechali cifru 1 na mieste desaťtisícov. Z rovnakého dôvodu sa pokúsme nepohnúť s cifrou 2 na mieste tisícov. Na zvyšných pozíciách nám zostanú už iba dve možnosti ako robiť výmeny:
345 → 354 → 534 → 543,
345 → 435 → 453 → 543.
V oboch prípadoch teda dostávame posledné trojčíslie 543. Najmenšie číslo, ktoré môže Ika vytvoriť, je preto číslo 12543.

Úloha 27. *Majo si jedného dňa povedal, že by si mal oddýchnuť od matematiky, a tak si začal kresliť. To by však nebol Majo, keby sa aj v jeho kreslení neobjavila matematika. Najprv si nakreslil úsečku AB dlhú 15 cm. Vyznačil na nej body C, D, E tak, že |AC| = 8 cm, |CD| = 4 cm, |DE| = 2 cm, |EB| = 1 cm. Potom nakreslil štvorce ACFG, CDHI, DEJK, EBLM tak, že bod I ležal na úsečke CF, bod K ležal na úsečke DH a bod M ležal na úsečke EJ. Zaujal ho útvar AGFIHKJMLB. Aký obvod má tento útvar?*

Výsledok: 46 cm
Riešenie: Po nakreslení obrázka si môžeme všimnúť, že vodorovné časti obvodu môžeme priradiť podľa veľkosti k úsečkám na úsečke AB – napríklad GF k AC, IH k CD atď. Z toho vyplýva, že súčet vodorovných častí úsečiek je dvojnásobkom dĺžky úsečky AB, čiže 2 · 15 cm = 30 cm.
Môžeme si tiež všimnúť, že niečo podobné platí aj pre zvislé časti. Ak by sme celý útvar „stlačili" na úsečku AG, „pravé" časti obvodu vytvoria úsečku s dĺžkou AG. To znamená, že súčet zvislých častí je dvojnásobok dĺžky úsečky AG, čiže 2 · 8 cm = 16 cm.
Obvod útvaru je teda 30 cm + 16 cm = 46 cm.

Úloha 28. *Ľubovi chutí čokoláda a mama mu na narodeniny dala 24 €. Ľubo sa rozhodol si za ne kúpiť čokoládu. V obchode mali 3 typy čokolád: čokoládu za 1 €, čokoládu za 3 € a čokoládu za 4 €. Vieme, že Ľubo minul všetky peniaze a že si z obchodu odniesol 12 čokolád. Z každého typu si pritom kúpil minimálne 1 čokoládu. Koľko čokolád za 1 € si mohol Ľubo kúpiť?*

Výsledok: 7
Riešenie: Ľubo kúpil minimálne 1 čokoládu každého typu. Tieto „povinné" čokolády ho stáli spolu 1 € + 3 € + 4 € = 8 €. Zvyšných 24 € - 8 € = 16 € minul na 12 - 3 = 9 čokolád tak, že už nemal žiadne podmienky. Ak by boli všetky zvyšné čokolády za 1 €, tak by na ne minul 9 · 1 € = 9 €. Potrebujeme preto niektoré z týchto čokolád nahradiť za drahšie tak, aby Ľubo minul o 16 € - 9 € = 7 € viac.
Nahradením za čokoládu stojacu 4 € minie Ľubo o 4 € - 1 € = 3 € viac. Nahradením za trojeurovú čokoládu zas minie o 3 € - 1 € = 2 € viac. Ľubo tak vie zvyšovať množstvo minutých peňazí len o 2 € a 3 €. Avšak číslo 7 sa dá dostať ako súčet dvojok a trojok jediným spôsobom – ako 7 = 2 + 2 + 3. Preto nahradíme 3 čokolády za 1 € dvomi čokoládami za 3 € a jednou za 4 €.
Dokopy tak dostávame, že Ľubo kúpil 9 - 3 + 1 = 7 čokolád za 1 € (okrem toho kúpil 3 čokolády za 3 € a 2 čokolády za 4 €).

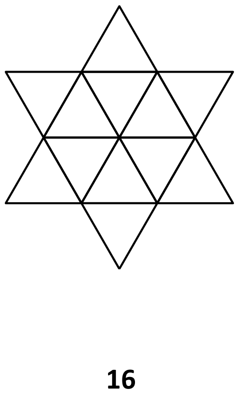
Úloha 29. *Rodina Permonovcov má 4 deti: Andreja, Beátu, Cyrila a Danielu. Zhodou okolností sú ich výšky zoradené rovnako ako ich mená v abecede: Andrej je najnižší, Beáta vyššia, Cyril ešte vyšší a napokon Daniela je najvyššia. Jedného dňa sa chceli postaviť do zástupu. Pritom sa chceli postaviť tak, aby ich výšky postupne rástli odpredu. To sa im ale nepodarilo, pretože presne jedno z detí stálo tesne pred dieťaťom, ktoré bolo od neho menšie. Koľkými spôsobmi sa mohli postaviť do zástupu?*
Poznámka: Napríklad zástup Cyril, Daniela, Andrej, Beáta spĺňa ich požiadavky – všade výška detí narastá okrem dvojice Daniela a Andrej, kde vyššia Daniela stojí pred Andrejom.

<u>Výsledok:</u> 11
Pre jednoduchosť označujme deti podľa prvého písmena ich mena.
Rozoberme prípady podľa toho, ako vyzerá dvojica, pri ktorej došlo k poklesu. Touto dvojicou môže byť jedna z dvojíc DA, DB, DC, CA, CB alebo BA.
1) Ak je to DA, tak všetci môžu byť na oboch stranách. Dostávame 4 možnosti BCDA, BDAC, CDAB, DABC.
2) Ak je to DB, tak A musí byť pred D. Dostávame 2 možnosti ACDB, ADBC.
3) Ak je to DC, tak A aj B musia byť pred D. Dostávame 1 možnosť ABCD.
4) Ak je to CA, tak D musí byť za A. Dostávame 2 možnosti BCAD, CABD.
5) Ak je to CB, tak D musí byť za B a A musí byť pred C. Dostávame 1 možnosť ACBD.
6) Ak je to BA, tak D a C musia byť za A. Dostávame 1 možnosť BACD.
Spolu sa teda vedia postaviť do zástupu 4 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 11 spôsobmi.

Úloha 30. *Každý deň presne o 12:00 vypláva z Rotterdamu parník do Miami a v tom istom okamihu aj druhý parník z Miami do Rotterdamu. Plavba medzi prístavmi trvá 60 hodín. Koľko lodí plávajúcich z Miami do Rotterdamu stretne parník, ktorý vypláva z Rotterdamu dnes o 12:00?*

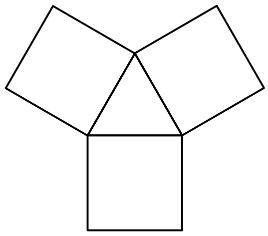
<u>Výsledok:</u> 5
<u>Riešenie:</u> Loď môže stretnúť iba lode plávajúce oproti nej. Cesta medzi prístavmi trvá 60 hodín, čo je presne 2 a pol dňa, alebo 24 + 24 + 12 hodín. Aj v Miami štartujú lode o 12:00 nášho času. V momente, kedy naša loď štartuje z Rotterdamu, sú na trase dve lode z Miami – jedna vyštartovala 24 hodín dozadu a druhá 48 hodín dozadu. Naša loď určite stretne tieto dve lode. Zároveň, v momente, kedy naša loď štartuje, z prístavu v Miami štartuje ďalšia loď, ktorú stretneme po ceste. To sú už tri lode. Po 24 hodinách plavby našej lode vyštartuje ďalšia loď z Miami, čo je štvrtá loď, ktorú stretneme. Po 48 hodinách štartuje piata, ktorú stretneme tiež. Potom nám plavba trvá už iba 12 hodín, takže stihneme prísť do Miami skôr, ako vyštartuje ďalšia loď. Dokopy teda stretneme 5 lodí.

Úloha 31. *Matej sa unudene pozeral z okna počas hodiny geometrie a nevenoval pozornosť tomu, čo sa deje na tabuli. Pani učiteľka si ho všimla, pozrela naňho a s úsmevom ho vyvolala. „Matej, poď k tabuli a zisti, koľko trojuholníkov sa ukrýva na tomto obrázku.“ Matej sa zmätene pozrel na tabuľu, ale bol stratený. Pomôžte Matejovi zistiť, koľko trojuholníkov (ľubovoľnej veľkosti) sa nachádza na obrázku.*



Výsledok: 20
Riešenie: Počítajme trojuholníky podľa veľkosti. Najmenšie trojuholníky spočítame ľahko – je ich 12. Potom je na obrázku 6 trojuholníkov, ktoré sú dvakrát väčšie (počítajú sa ľahko – každý z nich obsahuje jeden z trojuholníkov, ktoré tvoria „cípy“ hviezdy). Napokon sú na obrázku ešte dva veľké trojuholníky, ktoré sú trikrát väčšie ako najmenší trojuholník (ich vrcholy sú v najkrajnejších vrcholoch „cípov“ hviezdy). Na obrázku je teda spolu 12 + 6 + 2 = 20 trojuholníkov.

Úloha 32. *Matilda sa z dlhej chvíle rozhodla nakresliť rovnostranný trojuholník, ktorého všetky strany sú dlhé 6 cm. Ten sa jej prestal páčiť, a tak mu dokreslila na každú stranu jeden štvorec ako na obrázku. Aký je obvod útvaru, ktorý Matilda nakreslila?*



Výsledok: 54 cm
Riešenie: Obvod útvaru, ktorý Matilda nakreslila, sa skladá z 9 strán štvorcov. Tieto strany sú rovnako dlhé ako strany trojuholníka. Tým pádom je obvod útvaru 9 · 6 cm = 54 cm.

Úloha 33. *Matúš a jeho starší brat Dávid majú narodeniny v ten istý deň. Matúš sa zamyslel nad tým, že Dávid mal v nejakom momente dvakrát toľko rokov, čo on. V ktorom roku to tak mohlo byť, ak sa Matúš narodil v roku 2006 a Dávid v roku 1999?*

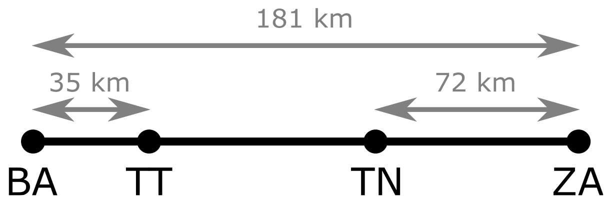
Výsledok: 2013
Riešenie: Z rokov narodenia vieme, že Dávid je od Matúša o 7 rokov starší. To znamená, že v každom roku bude mať Dávid o 7 rokov viac ako Matúš. Dávid mal teda dvakrát toľko rokov, čo Matúš vtedy, keď mal Matúš 7. Teraz už iba dopočítame, že to bolo v roku 2006 + 7 = 2013.

Úloha 34. *Keď sa Maťka pýtala Katky na jej obľúbené číslo, Katka zistila, že zabudla, ktoré to bolo! Pamätala si len, že bolo dvojciferné a že dávalo zvyšok 2 po delení 9 a zvyšok 3 po delení 10. Ktoré všetky čísla môžu byť Katkiným obľúbeným?*

Výsledok: 83
Riešenie: Čísla dávajú zvyšok 3 po delení desiatkou len vtedy, keď majú 3 na mieste jednotiek. Teda číslo bude v tvare X3. My však zároveň potrebujeme, aby číslo dávalo zvyšok 2 po delení 9, čo znamená, že musí byť o 2 väčšie ako nejaký násobok 9. Keďže obľúbené číslo sa má končiť číslom 3, znamená to, že hľadáme taký násobok čísla 9, ktorý sa končí číslom 3 - 2 = 1. Jediným takým dvojciferným násobkom je číslo 81, teda Katkine obľúbené číslo musí byť číslo 81 + 2 = 83.

Úloha 35. *Alica ide z Bratislavy autom do Žiliny. Na výjazde z Bratislavy si na dopravnej značke prečítala, že Trnava je od Bratislavy vzdialená 35 km a Žilina 181 km. Keď sa vracala, tak si na podobnej značke všimla, že Trenčín je od Žiliny vzdialený 72 km a Bratislava 181 km. Aká je vzdialenosť medzi Trnavou a Trenčínom?*

<u>Výsledok:</u> 74 km
<u>Riešenie:</u> Schematicky si zaznačme informácie zo zadania (namiesto názvov miest používame ich ŠPZ, t.j. Bratislava = BA, Trnava = TT, Trenčín = TN a Žilina = ZA):



Z toho vidíme, že cesta z Bratislavy do Žiliny je tvorená tromi úsekmi – z Bratislavy do Trnavy, z Trnavy do Trenčína a z Trenčína do Žiliny. Vieme dĺžku celej cesty a tiež dĺžku prvého a posledného úseku. Z toho dostaneme, že dĺžka prostredného úseku (na ktorý sa nás pýta zadanie) je 181 km - 35 km - 72 km = 74 km. Vzdialenosť medzi Trnavou a Trenčínom je teda 74 km.

Úloha 36. *Stano chcel piecť palacinky, no keďže na internáte nemá odmerku, ale iba váhu, musel improvizovať. Rozhodol sa, že množstvo mlieka odmeria približne pomocou váhy. Zobral si pohár, ktorý najprv doplna naplnil mliekom a potom ho aj s pohárom odvážil. Váha mu napísala 650 g. To sa mu zdalo priveľa, tak sa rozhodol, že polovicu mlieka odpije. Potom pohár s mliekom zase položil na váhu, ktorá mu napísala 450 g. Koľko gramov váži Stanov pohár?*

<u>Výsledok:</u> 250
<u>Riešenie:</u> Keď Stano odpil polovicu mlieka, číslo na váhe sa zmenšilo o 650 g - 450 g = 200 g. To znamená, že polovica mlieka váži 200 g. Keby Stano vypil aj druhú polovicu mlieka, zostal by mu prázdny pohár, ktorého hmotnosť chceme zistiť. Z hmotnosti pohára s polovicou mlieka chceme preto odčítať ešte hmotnosť polovice mlieka. Stanov pohár teda váži 450 g - 200 g = 250 g.

Úloha 37. *Bača z Matbojova nerád hovorí o počte svojich ovečiek. O tomto počte tak vždy rozpráva v hádankách. Včera povedal, že ovečiek má viac ako 90, no menej ako 120. Zároveň povedal, že počet ovečiek je také číslo, že ak sčítame súčet jeho cifier a potom aj výsledku sčítame počet cifier, tak dostaneme číslo 1. Paholok si potom zistil všetky možné počty Bačových oviec a všetky tieto počty sčítal. Aké číslo paholok dostal?*

<u>Výsledok:</u> 418
<u>Riešenie:</u> Zoberme si nejaké číslo od 90 do 120 a pozrime sa, čo s ním robí výpočet súčtu cifier. Pritom sčítavame najviac 3 cifry, takže rozhodne dostanem číslo, ktoré má buď 1, alebo 2 cifry (t.j. je isto menšie ako 100).
Hľadajme čísla, ktoré mohol paholok dostať po prvom výpočte súčtu cifier. To sú také jednociferné a dvojciferné čísla, ktorých súčet cifier je 1. Z jednociferných čísel je také číslo iba číslo 1. Z dvojciferných čísel jedine číslo 10.
Číslo, s ktorým začíname, tak musí mať súčet cifier rovný buď 1, alebo 10. Dvojciferné čísla od 90 do 99 majú súčet cifier isto aspoň 9. Takže vieme dostať iba súčet cifier 10, a to pre číslo 91.
Ďalej číslo 100 je jediné trojciferné číslo so súčtom cifier 1. Ostatné trojciferné čísla majú súčet cifier väčší ako 1. Na splnenie podmienky tak musia mať súčet cifier rovný 10. Pre čísla od 101 do 120 to splnia iba čísla, ktorých posledné dve cifry majú súčet 9. To sú čísla 109 a 118.
Počet Bačových ovečiek je teda niektoré z čísel 91, 100, 109, 118, ktorých súčet je 91 + 100 + 109 + 118 = 418.

Úloha 38. *Veronika doma kachličkuje miestnosť so záchodom. Je to miestnosť s podlahou tvaru štvorca s rozmermi 2 m × 2 m, pričom na jednej stene sú hneď na kraji dvere široké 50 cm. Veronika používa kachličky rozmerov 10 cm × 10 cm. Chce vykachličkovať podlahu a všetky steny do výšky 1 m (dvere samozrejme nekachličkuje). Koľko kachličiek Veronika potrebuje?*

Výsledok: 1150
Riešenie: Najprv sa zamyslime, či je možné vykachličkovať plochu celými kachličkami – a áno, je, keďže všetky rozmery sú násobkom 10 cm. To inými slovami napríklad znamená, že ak máme stranu podlahy dlhú 200 cm, zmestí sa na ňu rad 20 celých kachličiek.
Ak chceme vykachličkovať podlahu, musíme mať 20 takých radov 20 kachličiek, čo je spolu $20 \cdot 20 = 400$ kachličiek. Podobne vieme zistiť, že na jednu stenu, na ktorej nie sú dvere, treba 10 takýchto radov. Keďže také steny sú tri, potrebuje na ich vykachličkovanie $3 \cdot 10 \cdot 20 = 600$ kachličiek. Zostáva nám stena, na ktorej sú dvere, ktoré ju zužujú na 150 cm. Na takúto stenu potrebujeme 10 radov po 15 kachličiek, teda $10 \cdot 15 = 150$.
Spolu Veronika potrebuje $400 + 600 + 150 = 1150$ kachličiek.

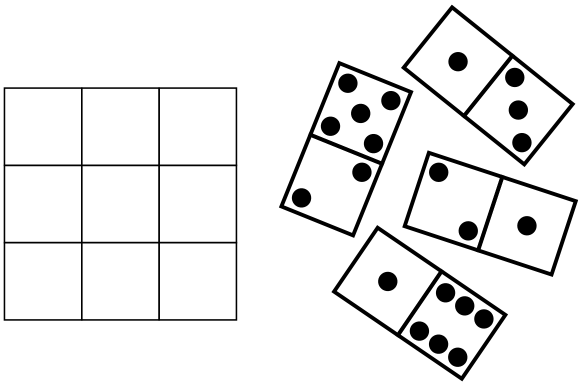
Úloha 39. *Mirko zľavil zo svojich nárokov a už má rád dvojciferné čísla, ktorých cifra na mieste desiatok je aspoň o 2 väčšia ako cifra na mieste jednotiek. Koľko takých dvojciferných čísel existuje?*

Výsledok: 36
Riešenie: Vypisujme si vyhovujúce čísla podľa cifry na mieste desiatok. Pre jednotku nedostaneme žiadne vhodné dvojciferné číslo, pre zvyšné cifry potom dostávame:
– pre cifru 2 máme 1 možnosť – 20,
– pre cifru 3 máme 2 možnosti – 30, 31,
– pre cifru 4 máme 3 možnosti – 40, 41, 42,
– pre cifru 5 máme 4 možnosti – 50, 51, 52, 53,
– pre cifru 6 máme 5 možností – 60, 61, 62, 63, 64,
– pre cifru 7 máme 6 možností – 70, 71, 72, 73, 74, 75,
– pre cifru 8 máme 7 možností – 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86,
– pre cifru 9 máme 8 možností – 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97.
Spolu tak Mirko má rád $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ dvojciferných čísel.

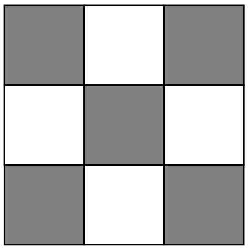
Úloha 40. *Nicol si v škole píše poznámky zásadne iba čiernym, zeleným a fialovým perom, preto v peračníku nosí iba perá týchto farieb. Vieme, že v peračníku sú všetky perá okrem 16 čierne, všetky perá okrem 10 sú zelené a všetky perá okrem 12 sú fialové. Koľko pier má Nicol v peračníku?*

Výsledok: 19
Riešenie: Všetkých pier, okrem tých čiernych, je 16. To inými slovami znamená, že zelených a fialových pier je spolu 16. Týmto sa dozvieme informácie:
zelené + fialové = 16,
čierne + fialové = 10,
čierne + zelené = 12.
Keď sčítame všetky tieto informácie, tak započítame každé pero dvakrát. Na druhej strane napočítame $16 + 10 + 12 = 38$ pier. Keďže sme každé započítali dvakrát, tak pier v peračníku musí byť $38 : 2 = 19$.
Poznámka: Ľahko dopočítame, že Nicol má v peračníku 19 - 16 = 3 čierne perá, 19 - 10 = 9 zelených pier a 19 - 12 = 7 fialových pier.

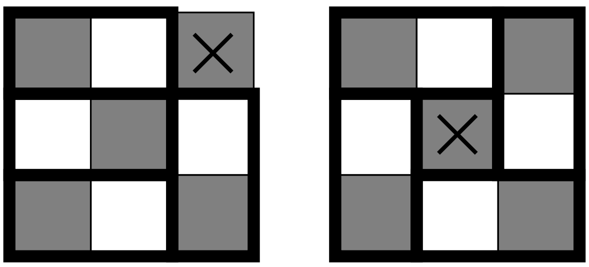
Úloha V1. *Panda sa niekedy v práci nudí. Našťastie, Logik mu na narodeniny daroval hru, s ktorou sa môže v práci zabávať. Hru tvorí tabuľka 3 × 3 a štyri dominá, ako vidíš na obrázku. Vždy si vezme domino kocku a zakryje ňou presne dve políčka tabuľky, ktoré ešte nie sú zakryté. Takto položí všetky štyri dominá s tým, že susediace dominá nemusia mať na sebe zhodné čísla. Jedno políčko potom zostane nezakryté. Pandu však aj táto hra čoskoro začne nudiť, lebo už zistil, ktoré všetky políčka môžu byť tým posledným, nezakrytým políčkom. Ktoré políčka to sú?*



Výsledok: stredné políčko a rohové políčka
Riešenie: Pri riešení tejto úlohy nám pomôže, ak si tabuľku šachovnicovo zafarbíme ako na obrázku.



Keď kdekoľvek na tabuľku položíme domino, vždy zakryje jedno biele a jedno čierne políčko. Všimnime si, že čiernych políčok je 5, zatiaľ čo biele sú len 4. Keď teda Panda uloží na tabuľku všetky 4 dominá, zakryje tým 4 čierne a 4 biele políčka. Zostávajúce nezakryté políčko teda musí byť čierne. Čierne políčka sa nachádzajú iba na rohoch a v strede.
Treba ešte overiť, či naozaj vieme položiť dominá na tabuľku tak, aby zostali tieto políčka nezakryté. Na obrázku vidíme, že pravé horné políčko môže zostať nezakryté. To znamená, že akékoľvek rohové políčko môže zostať nezakryté – tabuľku stačí otočiť. Na ďalšom obrázku vidíme, že aj stredové políčko môže zostať nezakryté.



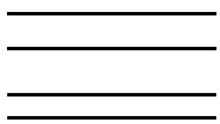
Teda platí, že všetky políčka, ktoré môžu zostať nezakryté, sú stredové políčko a rohové políčka.

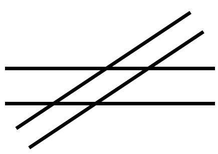
Úloha V2. *Piati kamaráti sa rozprávajú o nejakom dvojcifernom čísle. Pritom o ňom rozprávajú tvrdenia:*
Andrea povedala: „Toto číslo má na mieste desiatok cifru 5.“
Beáta povedala: „Toto číslo je násobkom čísla 11.“
Cyprián povedal: „Toto číslo nie je násobkom čísla 5.“
Damián povedal: „Toto číslo je nepárne.“
Ela povedala: „Súčet cifier tohto čísla je 10.“
Ukázalo sa, že iba jeden z kamarátov vyslovil nepravdivé tvrdenie. O akom čísle sa kamaráti rozprávali? Nájdite všetky možnosti.

Výsledok: 55
Riešenie: Rozoberme prípady podľa toho, či Beáta hovorí pravdu.
Ak Beáta nehovorí pravdu, tak hľadané číslo nie je násobkom 11. To pre dvojciferné čísla znamená, že hľadané číslo nemá dve rovnaké cifry, čiže jeho cifry sú rôzne. Zároveň však majú mať pravdu všetci ostatní. Podľa Andrey teda má byť na mieste desiatok cifra 5, no potom má podľa Ely byť na mieste jednotiek cifry 10 - 5 = 5. Takže výsledné číslo je 55, čo je ale v spore s tým, že Beáta nehovorí pravdu.
Preto Beáta určite hovorí pravdu. Príslušné dvojciferné číslo sa tak skladá z dvoch rovnakých cifier. Všimnime si, že v takomto prípade z Andreinho aj Elinho výroku vyplýva, že hľadané číslo je 55. Preto musia oba byť pravdivé. Ľahko skontrolujeme, že v prípade čísla 55 je Cyprián jediný, kto nehovorí pravdu. Preto jediné číslo, o ktorom sa mohli kamaráti rozprávať, je číslo 55.

Úloha V3. *Ninka si na papier nakreslila 4 rôzne priamky. Pri tom platilo, že každá priamka bola rovnobežná s nejakou inou priamkou. Ninka spočítala počet priesečníkov týchto priamok. Aké rôzne počty priesečníkov mohla dostať?*

Výsledok: 0 alebo 4
Riešenie: Postupne kreslime priamky s Ninkou. Nakreslíme prvú z nich. Nejaká priamka musí byť s ňou rovnobežná, tak nakreslime túto rovnobežnú priamku. Tretia priamka môže byť s prvými dvomi buď rovnobežná, alebo rôznobežná.
– Predpokladajme, že je tretia priamka rovnobežná s prvými dvomi. Štvrtá priamka musí byť rovnobežná s niektorou z prvých troch. Potom však sú všetky štyri priamky navzájom rovnobežné. Teda máme 0 priesečníkov.
– Predpokladajme, že je tretia priamka rôznobežná s prvými dvomi. Táto priamka musí byť rovnobežná s niektorou priamkou. Jediná možnosť je, aby bola rovnobežná so štvrtou priamkou. Máme teda dve dvojice navzájom rovnobežných priamok. Tie majú spolu 4 priesečníky.
Dokopy teda dostávame, že možné počty priesečníkov sú 0 alebo 4.


0

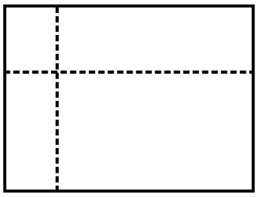

4

Úloha V4. *Na dnešnom Rally sa pretekajú 5 kamaráti, každý v aute inej farby – modrom, bielom, červenom, fialovom a zelenom. Hodinu pred koncom boli autá v nejakom poradí. Počas poslednej hodiny najprv modré auto naraz predbehlo 4 autá, potom červené auto naraz predbehlo 3 autá a nakoniec biele auto naraz predbehlo 2 autá. Ktoré auto skončilo predposledné, ak bolo hodinu pred koncom fialové auto druhé? Nájdite všetky možnosti.*

<u>Výsledok:</u> zelené alebo fialové

<u>Riešenie:</u> Skúsme si nazvať autá podľa prvého písmena ich farby – M, B, Č, F, Z. Ak modré auto predbehlo 4 autá, muselo byť pred predbiehaním posledné. Predbehnutím štyroch áut sa dostalo na prvé miesto, čím sa stalo fialové auto tretím. Napíšme si poradie áut spredu po tom, čo modré auto predbehlo 4 autá (s tým, že miesta, kde ešte nevieme, kto je, označíme prázdnym miestom): M _ F_ _ . Červené auto môže byť iba na predposlednom alebo poslednom mieste, lebo na druhom mieste by pred sebou nemalo 3 autá, ktoré má podľa zadania predbehnúť. Po tom, čo červené auto predbehne tri autá, sú dve možnosti poradia: Č M _ F _ alebo M Č _ F _. V oboch možnostiach sa fialové auto stalo predposledným a v oboch možnostiach môže byť biele auto iba na treťom alebo poslednom mieste. Zelené auto je na mieste, ktoré zostane voľné. Ak bolo biele auto posledné a predbehlo dve autá, fialové auto sa dostalo na posledné miesto a zelené auto sa dostalo na predposledné miesto. Ak bolo biele auto tretie a predbehlo dve autá, fialové auto zostalo na predposlednom mieste rovnako, ako pred predbiehaním bieleho auta. Predposledné teda mohlo skončiť iba zelené alebo fialové auto.

Úloha V5. *Alex si kúpil veľkú deku – teda, skôr veľký obdĺžnikový kus látky s obvodom 700 cm, z ktorej chce vyrobiť 4 menšie deky tvaru obdĺžnika. Na túto obdĺžnikovú látku by chcel nakresliť jednu zvislú a jednu vodorovnú úsečku, ktoré by rozdelili látku na štyri obdĺžniky (na obrázku sú úsečky naznačené čiarkovanou čiarou). Látku by potom rozstrihal po týchto úsečkách a každú zo štyroch diek by chcel po obvode obšiť. Nechce sa však upracovať, tak uvažuje, ako látku rozdeliť na 4 obdĺžniky tak, aby súčet ich obvodov bol čo najmenší. Aký najmenší a aký najväčší súčet obvodov štyroch diek v centimetroch môže Alex dostať?*



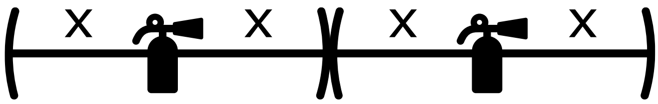
<u>Výsledok:</u> 1400 a 1400

<u>Riešenie:</u> Zvislá úsečka je rovnako dlhá ako zvislá strana obdĺžnikovej látky a vodorovná úsečka je rovnako dlhá ako vodorovná strana obdĺžnikovej látky. Keď Alex rozstrihne látku po týchto úsečkách, pridá tým do súčtu obvodov dĺžky týchto strán dvakrát. Každá strana pribudne dvakrát, lebo rozstrihnutie po úsečke spôsobí vznik dvoch nových strán – jedna patrí jednému a druhá druhému z obdĺžnikov, ktoré rozstrihnutím po jednej úsečke vznikajú. Keď Alex prestrihne látku aj po oboch úsečkách, dĺžky strán diek budú síce menšie ako dĺžky strán látky, ale keď ich sčítame, vidíme, že dokopy dávajú dve zvislé a dve vodorovné strany obdĺžnikovej látky. Vieme, že obvod obdĺžnika je rovný súčtu $2 \cdot a + 2 \cdot b$, kde a, b sú dĺžky strán obdĺžnika. Keďže Alexovi pribudli presne dve zvislé a dve vodorovné strany, pribudol mu jeden celý obvod obdĺžnika. Všimnime si, že nezáleží na tom, kde presne Alex látku rozstrihne – v súčte vždy pribudnú presne dve zvislé strany a dve vodorovné strany. Alex teda vždy dostane súčet obvodov 700 cm + 700 cm = 1400 cm.

Úloha V6. *Istá železničná spoločnosť má nové trojvozňové vlakové súpravy bez lokomotívy. Chce do nich rozmiestniť 2 hasiace prístroje a to takým spôsobom, aby najdlhšia možná vzdialenosť z ktoréhokoľvek miesta vlaku k najbližšiemu hasiacemu prístroju bola čo najmenšia. Ak má jeden vozeň dĺžku 24 metrov, a teda celá súprava má dĺžku 72 metrov, koľko metrov od začiatku súpravy sa má uložiť prvý hasiaci prístroj?*

<u>Výsledok:</u> 18

Riešenie: Predstavme si reálnu situáciu (ktorá snáď nenastane), že nejaký požiarnik musí zobrať niektorý z hasiacich prístrojov a ísť hasiť k ohňu. Chceme, aby hasiace prístroje boli rozmiestnené rozumne – čo znamená, že každé potenciálne miesto vzniku ohňa bude od hasiaceho prístroja vzdialené najviac x metrov, kde x je číslo, ktoré hľadáme.
Preto sa na úlohu môžeme pozrieť nasledovne: predstavme si že od každého hasiaceho prístroja vyštartujú dvaja požiarnici, každý opačným smerom. Každý požiarnik sa pritom pohybuje rovnakou rýchlosťou. Potom sú relevantné nasledujúce situácie – keď niektorý požiarnik príde na začiatok/koniec vlaku a keď niektorý požiarnik stretne iného požiarnika. Rozmyslime si, že v optimálnom prípade všetky stretnutia a všetky prídenia na začiatok/koniec vlaku nastanú naraz. Ak by sa to nestalo, tak sa nejaká dvojica požiarnikov stretne (resp. niektorý požiarnik príde na začiatok/koniec vlaku) skôr ako nastanú zvyšné stretnutia. To však znamená, že hasiace prístroje, od ktorých vyštartovali, boli pri sebe zbytočne blízko, a tak chceme oddialiť. Takýmto presunom zabezpečíme, že takáto situácia nastane neskôr – to značí, že po posune sú hasiace prístroje umiestnené optimálnejšie. V optimálnom prípade tak budeme v situácii, že všetky stretnutia a všetky prídenia na začiatok/koniec vlaku nastanú naraz. To však znamená, že v optimálnom prípade musia byť hasiace prístroje rozmiestnené nasledovne: každý hasiaci prístroj musí mať okolo seba „ochrannú zónu“ v dĺžke x metrov do oboch smerov od daného hasiaceho prístroja. Navyše sa tieto ochranné zóny pre jednotlivé hasiace prístroje nesmú pretínať.



Každý z 2 hasiacich prístrojov teda má ochrannú zónu dlhú 2x. Pre celú dĺžku vlaku tak platí $2 \cdot 2x = 72$ m. Odtiaľ $x = 72$ m : $4 = 18$ m. Takže prvý hasiaci prístroj musí byť vzdialený 18 m od začiatku súpravy.