Ahojte,

držíte v rukách zbierku úloh a vzorových riešení Matboja 2026.
Matboj 2026 je matematická súťaž pre žiakov piateho až ôsmeho ročníka základných škôl a prímy až tercie osemročných gymnázií. Súťaž organizuje nezisková organizácia P-MAT, n. o., ktorá organizuje aj korešpondenčné semináre Pikomat, Pikofyz a Terabio a iné jednodňové súťaže – Pikopretek, Attomat a Attoved.

Štvorčlenné tímy žiakov sú rozdelené do štyroch súťažných kategórií – 5, 6, 7 a 8.
Súťaž prebieha 120 minút, počas ktorých sa súťažiaci snažia vyriešiť čo najviac úloh. Okrem toho dostanú za každú správne vyriešenú úlohu jeden ťah v strategickej hre, ktorú tímy počas súťaže hrajú. Konečné poradie tímov teda neovplyvňuje len počet vyriešených úloh, ale aj to, ako dobre sa im v tejto hre darilo.

Táto súťaž je zameraná na zlepšenie logického myslenia, matematického uvažovania a práce v tíme, no predovšetkým na možnosť objaviť radosť z matematiky. Vytvorili sme túto zbierku úloh, aby žiaci, ktorých úlohy zaujali, mali možnosť znova si ich prepriešiť, poprípade si prečítali vzorové riešenia, z ktorých sa dá veľmi veľa naučiť, aj keď úlohu vyriešili správne. Taktiež môže slúžiť ako inšpirácia pre učiteľov na čerpanie netradičnejších úloh na hodiny matematiky.

Želáme Vám príjemné riešenie a veľa nových poznatkov!

Vaši organizátori

Úloha 01. *Terka si postupne píše na papier čísla. Robí to podľa nasledujúcich pravidiel:*
- Ak bolo posledné napísané číslo párne, tak na papier napíše polovicu tohto čísla.
- Ak bolo posledné napísané číslo nepárne, tak na papier napíše trojnásobok tohto čísla zväčšený o 1.
Na začiatok Terka napísala na papier číslo 7. Ktoré číslo bude na papieri napísané dvakrát?

Výsledok: 4
Riešenie: Vypíšme si postupne čísla, ktoré Terka napíše:
7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, ...
Vidíme, že ako prvé sa zopakovalo číslo 4.

Úloha 02. *Na Marse je mesto s veľmi dlhou ulicou. Na jednej strane ulice sú postupne domy, ktorých čísla sú násobky čísla 3. Od začiatku ulice sú teda domy s číslami 3, 6, 9, 12, 15, ... Na druhej strane sú potom v rovnakých rozostupoch všetky ostatné čísla. Postupne sú tam teda domy s číslami 1, 2, 4, 5, 7, ... Napríklad oproti domu s číslom 5 sa nachádza dom s číslom 12. Aké číslo má dom, ktorý sa nachádza oproti domu s číslom 47?*

Výsledok: 96
Riešenie: Číslo 47 nie je deliteľné tromi (môžeme si to overiť napríklad jeho ciferným súčtom 4 + 7 = 11), takže dom s týmto číslom sa nachádza na druhej strane ulice. Potrebujeme zistiť, koľký je v poradí. Na tejto druhej strane sú domy so všetkými číslami okrem tých, ktoré sú deliteľné tromi. Od čísla 47 teda odčítame počet násobkov 3 menších ako 47. Každé tretie číslo je násobkom 3, takže vydelíme 47 tromi: 47 : 3 = 15, zv. 2, a tým zistíme, že počet násobkov 3 menších ako 47 je 15. Odčítame 47 − 15 = 32 čím zistíme, že dom s číslom 47 je 32. v poradí. Na prvej strane ulice sú iba násobky čísla 3, takže 32. dom v poradí bude mať číslo 32 × 3 = 96.

Úloha 03. *Janka sa jeden mrazivý večer dívala na oblohu a zbadala hviezdy Capela, Kastor a Pollux, ktoré ležia postupne na jednej priamke. Rozhodla sa ju teda zmerať pravítkom. Namerala dĺžky úsečiek CK (Capela – Kastor), KP (Kastor – Pollux), CP (Capela – Pollux) a zistila, že majú dĺžky 15 cm, 11 cm a 20 cm. Začalo sa jej to však zdať divné. Potom si uvedomila, že po náročnom polroku v škole sa jej pravítko niekedy zlomilo, a tak nemerala od nuly, ale od iného čísla. Aká bola dĺžka odlomenej časti pravítka?*

Výsledok: 6 cm
Riešenie: Vieme, že CK (Capela – Kastor) + KP (Kastor – Pollux) = CP (Capela – Pollux), lebo tieto tri hviezdy ležia na priamke. Podľa zadaných hodnôt by malo platiť 15 + 11 = 26, lenže nameraná časť je 20, preto odlomená časť bude 6 cm.

Úloha 04. *Dorotka bola na výstave komét. Kométy boli modré a červené. Dokopy ich bolo 42. Dorotka vie, že jedných je 2-krát viac ako druhých. Najmenej koľko náhodných komét si musí Dorotka pozrieť, aby vedela s istotou povedať, ktorých je viac?*

Výsledok: 29
Riešenie: Dokopy máme 42 komét a ak má byť jedných 2-krát viac ako druhých, tak je to to isté, ako keď sú 2 tretiny jednej farby a tretina druhej farby. Ak Dorotka uvidí z nejakej farby 15 komét, tak vie, že tej farby je viac, pretože tretina zo 42 je 14. Avšak môže sa stať, že uvidí 14 modrých a 14 červených komét a v tom prípade si musí pozrieť ešte jednu, aby vedela, ktorých komét je viac. Preto musí Dorotka vidieť aspoň 29 komét, aby vedela s istotou povedať, ktorých komét je viac.

Úloha 05. *Na Neptúne funguje zálohovanie plastových fliaš rovnako ako u nás na Slovensku. Ku každej zakúpenej fľaši sa pripočíta záloha 0,15 €, ktorá sa zákazníkovi vráti, keď fľašu príde vrátiť do predajne. Miro si kupuje svoju obľúbenú vesmírnu žbrndu vo fľaši. Tá stojí 0,85 €, takže po pripočítaní zálohy stojí presne 1 €. Minule si Miro kúpil zásobu tejto žbrndy tak, že za všetky fľaše spolu zaplatil 100 €. Keď všetky fľaše vypil, vrátil ich a za vrátenú zálohu si kúpil ďalšie fľaše. Toto opakoval dovtedy, kým sa to dalo. Koľko fliaš si Miro celkovo kúpil?*

Výsledok: 117
Riešenie: Za 100 € si Miro kúpil 100 fliaš, keďže jedna stojí 1 €. Keď fľaše zálohoval, tak získal 100 × 0,15 € = 15 €. Z toho si kúpil 15 € : 1 € = 15 fliaš. Keď tie zálohoval, tak získal 15 × 0,15 € = 2,25 €, za čo si mohol kúpiť už len 2 fľaše a ostalo mu 0,25 €. Keď tieto posledné 2 fľaše vrátil, tak zo zálohy získal už len 0,30 €. V zásobe mal ešte 0,25 € z minulého vrátenia, teda dokopy má 0,55 €, za čo si už ďalšie fľaše nekúpi. Teraz stačí iba sčítať počty nakúpených fliaš a vyjde nám 117.

Úloha 06. *Kolonizátori začali pestovať oolong čaj na Venuši. Oolong čaj sa zvykne zalievať na viac zálevov. Lístky sa tak postupne otvárajú a každý zálev chutí trochu inak. Pri prvom záleve je odporúčané nechať čajové lístky lúhovať 30 sekúnd, pri druhom iba 20 sekúnd, pri treťom 30 sekúnd a potom je zakaždým odporúčaná dĺžka lúhovania o 10 sekúnd dlhšia oproti predchádzajúcemu zálevu. Oolong sa nesmie dokopy lúhovať viac ako 5 minút, lebo začne vylučovať nežiaduce látky. Koľko najviac zálevov si môžeme pripraviť, ak dodržiavame odporúčané časy lúhovania?*

Výsledok: 7
Riešenie: Poďme počítať celkový čas lúhovania po jednotlivých nálevoch.
Po prvom náleve sa čaj lúhuje 30 sekúnd.
Druhý trvá 20 s, spolu s prvým je to 30 s + 20 s = 50 s.
Po treťom náleve bude celkový čas 50 s + 30 s = 80 s.
Štvrtý nálev sa bude lúhovať 40 sekúnd (o 10 s viac ako predchádzajúci), takže celkový čas bude 80 s + 40 s = 120 s.
Po piatom náleve bude čas lúhovania 120 s + 50 s = 170 s.
Po šiestom náleve bude čas 170 s + 60 s = 230 s.
Po siedmom náleve bude čas 230 s + 70 s = 300 s.
Avšak 300 sekúnd je 5 minút, a tak viac už čaj lúhovať nesmieme.
Správna odpoveď je 7.

Úloha 07. *Ninka a Miško chceli zobrať do vesmíru niekoľko papagájov a niekoľko korytnačiek.*
Ninka povedala: „Vezmeme toľko zvierat, aby súčet ich hláv bol 16. A počet zvieracích nôh 58."
Miškov názor bol: „Urobíme to tak, že zoberieme zvieratá, ktoré majú dokopy 14 hláv. A taktiež 44 zvieracích nôh."
Napokon sa dohodli, že vyhovejú jednej žiadosti od Ninky a jednej žiadosti od Miška. Koľko korytnačiek a koľko papagájov zobrali?

Výsledok: 6 korytnačiek a 10 papagájov
Riešenie: Ak by sme splnili Miškovu žiadosť, aby mali zvieratká dokopy 14 hláv, najviac nôh by mohli mať 14 × 4 = 56. To by bolo vtedy, keby zobral samé korytnačky - ale ani to nestačí na splnenie Ninkinej žiadosti, aby mali dokopy 58 zvieracích nôh.

Tým pádom musíme splniť Ninkinu žiadosť, aby mali 16 hláv, a Miškovu, aby mali 44 nôh. V tomto prípade môže mať najmenej 32 nôh - ak bude všetkých 16 zvierat papagájov. Stále nám však treba pridať ešte 12 nôh. To urobíme tak, že 6 z týchto zvierat bude korytnačiek, ktoré majú o dve nohy viac ako papagáji.

Korytnačiek bude 6 a papagájov tak bude 16 − 6 = 10.

Úloha 08. *Maťo si píše kriedou po Mesiaci. Keď napísal slovo MAMA, skrátila sa krieda o 22 mm. Keď napísal slovo MATO, skrátila sa o 16 mm. Keď napísal slovo TATO, skrátila sa o 12 mm. Keď napísal slovo TAM, skrátila sa o 13 mm. O koľko milimetrov sa skráti krieda, keď Maťo napíše na Mesiac slovo TOMATO?*

Výsledok: 21 mm

Riešenie: Keď Maťo napíše slovo MATO, tak akoby napísal celé slovo TAM a navyše napísal písmeno O. Po napísaní písmena O sa teda krieda skráti o 16 mm − 13 mm = 3 mm. Keď napíše slovo MAMA, tak dvakrát napíše M aj A. Ak by ich napísal iba raz, skrátila by sa krieda o 22 mm : 2 = 11 mm. Ak však k týmto dvom písmenám pripíše písmeno T, tak už napíše písmená slova TAM. Po napísaní písmena T sa teda skráti krieda o 13 mm − 11 mm = 2 mm.
Teraz už vieme v slove TATO dopočítať, ako sa skráti krieda po napísaní písmena A. Konkrétne o 12 mm − 2 mm − 2 mm − 3 mm = 5 mm. Napokon napríklad zo slova TAM určíme, ako sa skráti krieda pri napísaní písmena M. Vyjde nám skrátenie o 13 mm − 2 mm − 5 mm = 6 mm.
Zostáva už len určiť skrátenie po napísaní slova TOMATO. To bude 2 mm + 3 mm + 6 mm + 5 mm + 2 mm + 3 mm = 21 mm.

Úloha 09. *Patrik doniesol kamarátovi mimozemšťanovi hnedú drevenú kocku. Predtým, ako mu ju dal, ju nafarbil na fialovo. Minul na to 60 gramov fialovej farby. Mimozemšťanovi sa však kocka zdala príliš veľká, a tak ju rozrezal na niekoľko rovnako veľkých kocočiek. Potom sa mu ale nepáčilo, že niektoré steny kocočiek sú fialové a niektoré hnedé. Preto zafarbil všetky hnedé steny na fialovo. Minul pri tom 300 gramov farby. Na koľko malých kocočiek mimozemšťan rozrezal veľkú kocku?*

Výsledok: 216

Riešenie: Ak veľkú kocku rozrežeme vodorovne na niekoľko (N) vrstiev kocočiek, budeme mať N-krát väčšiu plochu vodorovných stien (teda ak by sme veľkú kocku rozrezali napríklad na 4 vrstvy, tak máme zrazu 4 horné a 4 dolné steny). To isté platí aj o rezaní v predo-zadnom smere, aj o rezaní v horno-dolnom smere. Navzájom sa rezy v iných smeroch neovplyvňujú - akurát sa väčšia stena rozdelí na viac menších, ale celková plocha sa nezmení.
Pri rozrezaní na N × N × N kocočiek bude v každom smere N vrstiev, a teda budeme potrebovať N-krát viac farby. Keďže Patrik potreboval 60 gramov a dokopy s mimozemšťanom potrebovali 300 + 60 = 360 g farby, tak to znamená, že v každom smere bola veľká kocka rozdelená na 360 : 60 = 6 vrstiev.
Malých kocočiek preto bolo 6 × 6 × 6 = 216.

Úloha 10. *Na planéte sme objavili zaujímavých mimozemšťanov, ktorí vychádzajú von v trojdňových intervaloch. Prvý deň vychádza von o 6 mimozemšťanov menej ako v druhý a tretí deň dokopy. Druhý deň vychádza von o 10 mimozemšťanov menej ako v prvý a tretí deň dokopy. Koľko mimozemšťanov vychádza von v tretí deň?*

Výsledok: 8

Riešenie: Ak od súčtu počtov mimozemšťanov, ktorí vychádzajú von druhý a tretí deň, odčítame 6, dostaneme počet mimozemšťanov, ktorí vychádzajú von v prvý deň. Ak od súčtu počtov mimozemšťanov, ktorí vychádzajú von prvý a tretí deň, odčítame 10, dostaneme počet mimozemšťanov, ktorí vychádzajú von v druhý deň. Ak teda sčítame počty mimozemšťanov za prvý a druhý deň, bude to rovnako veľa, akokeby sme sčítali počty za druhý a tretí deň, od toho odčítali 6 a pripočítali počty za prvý a tretí deň a od toho odčítali 10. Všimnime si, že sme vlastne sčítali prvý deň, druhý deň, dvakrát tretí deň a odčítali dokopy 16. Týmto spôsobom nám má vyjsť rovnaké číslo, akokeby sme iba sčítali počty mimozemšťanov za prvý a druhý deň. To znamená, že pripočítaním dvakrát tretieho dňa a odčítaním 16 sa nič nezmení. Z toho vyplýva, že dvakrát počet za tretí deň je rovný 16, teda v tretí deň vyšlo von 16 : 2 = 8 mimozemšťanov.

Úloha 11. *Vzdelaní inžinieri poslali Krtka v rakete na asteroid 433 Eros. Raketa bola vybavená 3D tlačiarňou pre opravenie náhlych nárazov iných asteroidov. Vždy pri opravovaní si vytlačí štvorcové kusy záplat, ktoré sa na 3D tlačiarni tlačia v štvorcovej sieti. Teraz si potreboval vytlačiť 4 kusy záplat a tlačil ich v sieti 2 × 2. Preusporiadal ich tak, aby zaplátal svoju podlhovastú dieru širokú jeden kúsok záplaty. Zistil ale, že takéto usporiadanie má o 8 cm väčší obvod ako keď boli záplaty uložené v štvorcovej sieti 2 × 2. Aká bola dĺžka strany jedného kusu záplaty?*

Výsledok: 4 cm

Riešenie: Obvod tabuľky 2 × 2 je tvorený ôsmimi stranami záplaty, keďže každý kus záplaty má na obvode dve strany. Keď záplaty uložíme do tvaru 1 × 4, na obvode bude dokopy 10 strán záplaty. Obvod sa teda zväčšil o dve strany záplaty a zároveň o 8 cm, čo znamená, že jedna strana zväčšila obvod o 4 cm. Dĺžka strany záplaty je teda 4 cm.

Úloha 12. *Tomáš sa nudil na dlhej ceste vesmírom, tak vytiahol pero a papier a začal písať. Najprv napísal štyri prirodzené čísla, potom si zobral každú dvojicu týchto čísel a sčítal ich. Dostal tak v nejakom poradí súčty 7, 8, 10, 11, 13, 14. Aký bol súčet čísel, ktoré Tomáš napísal na papier?*

Výsledok: 21

Riešenie: Medzi štyrmi číslami existuje šesť dvojíc. Každé číslo sa vyskytuje v troch dvojiciach, lebo musí byť popárované so všetkými tromi zvyšnými číslami. Keď sčítame všetky súčty dvojíc, 7 + 8 + 10 + 11 + 13 + 14 = 63, dostaneme trojnásobok celkového súčtu, keďže každé číslo sme započítali trikrát. Súčet štyroch čísel na papieri je teda 63 : 3 = 21.

Úloha 13. *Majo počas prvých olympijských hier na Uráne sledoval skoky na lyžiach. Zaujal ho bodovací systém. Hodnotia sa v ňom nasledujúce tri zložky:*
- Za dĺžku skoku získa skokan body nasledovne: Ak skočí 98 metrov, dostane 60 bodov. Za každých 0,5 m navyše dostane skokan 1 bod navyše.
- Za štýl skoku dostane skokan známky od piatich rozhodcov. Najlepšia a najhoršia z nich sa škrtne (ak je takých viac, tak sa škrtne ktorákoľvek z nich). Zvyšné tri známky sa sčítajú, a to sú body za štýl.
- Za vietor a výšku nájazdového okna sa skokanovi pripočítajú, resp. odpočítajú, body podľa vopred daných tabuliek.
Favorit Elion Zorak pri jednom svojom skoku dostal celkovo 121,1 bodu. Za vietor a výšku nájazdového okna si pripočítal 7,6 bodu. Okrem toho dostal od rozhodcov známky za štýl 17,0; 17,5; 18,0; 17,5; 17,5. Aká bola dĺžka jeho skoku?

Výsledok: 98.5

Riešenie: Zo známok za štýl sa má škrtnúť najmenšia a najväčšia. Škrtnú sa teda známky 17,0 a 18,0. Zostanú nám tri známky 17,5. Finálne body za štýl sú preto 17,5 + 17,5 + 17,5 = 52,5. Keď tieto body a body za vietor a výšku nájazdového okna odčítame od celkových bodov, ktoré Elion získal, dostaneme jeho body za dĺžku skoku. Dostávame tak 121,1 - 52,5 - 7,6 = 61 bodov. To je o 1 bod viac ako sa udeľuje za doskočenie do vzdialenosti 98 metrov. Za každých 0,5 metra nad 98 metrov sa udeľuje 1 bod, takže vieme povedať, že Elion skočil do vzdialenosti 98 m + 0,5 m = 98,5 m.

Úloha 14. *Kucho zajtra píše testy, aby mohol letieť do vesmíru, a potrebuje vstávať o 6:30. Ak pôjde spať o 22:30, získa 30 bodov. Za každú hodinu, ktorú bude spať menej, stratí na teste 2 body. Kucho si to však neuvedomuje a namiesto spania scrolluje vesmírny toaleťák do 1:30. Čas, ktorý strávil scrollovaním, mohol venovať učeniu a za každú hodinu učenia by získal 3 body. O koľko bodov viac by získal, keby sa namiesto scrollovania učil?*

Výsledok: 9
Riešenie: Od 22:30 do 1:30 ubehnú 3 hodiny. Keďže Kucho by sa yačal učiť po 22:30, aj tak by stratil 2 body za nespanie za každú z troch hodín. Jediné, čo by získal navyše, sú 3 body za každú z troch hodín, počas ktorých by sa namiesto scrollovania učil. Dohromady by Kucho dostal o 3 × 3 = 9 bodov viac.

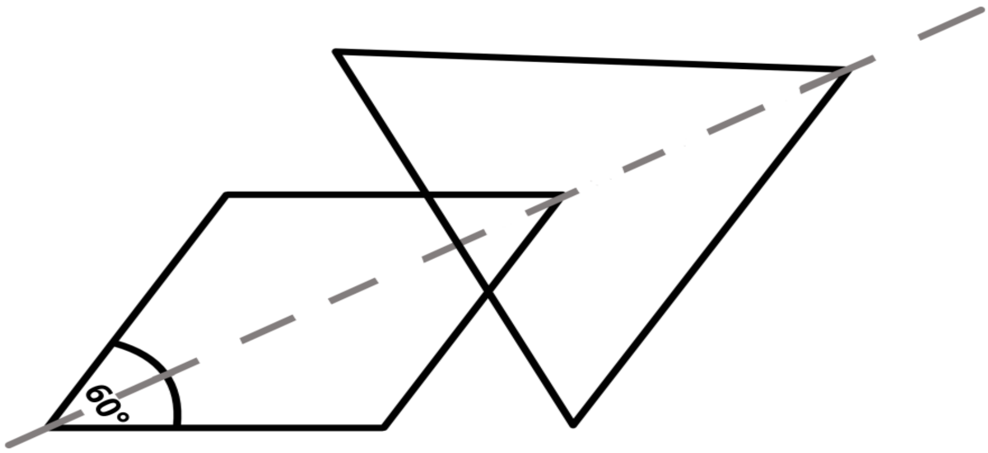
Úloha 15. *Kolonisti na Marse začali pestovať mrkvičky, lebo sú pekné oranžové ako zvyšok Marsu. Astronautka Ninka sa naučila piecť z nich skvelý mrkvový koláč a vždy, keď príde nová posádka, tak im ho napečie. Koláč vždy rozkrája na rovnaký počet kusov. Aký je najmenší počet kúskov, na ktorý to Ninka môže vždy nakrájať, ak pri posádkach o veľkostiach 10, 9 aj 6 vyjde každému členovi danej posádky rovnaký počet kúskov?*

Výsledok: 90
Riešenie: Všimnime si, že počet kúskov koláča, ktorý sa dá rozdeliť rovnako medzi 10 ľudí, musí končiť nulou - 10, 20, 30 ...90, inak zostane nejaký kúsok nazvyš. Teraz budeme postupne skúšať deliť tieto čísla 9 a zístime, že najmenšie z týchto čísiel, ktoré sa dá deliť 9, je 90. Ak skúsime 90 vydeliť 6 tak zistíme, že aj týmto číslom je delitelné, a teda 90 kúskov koláča je najmenší možný počet, ktorý sa dá rozdeliť všetkým trom posádkam.

Úloha 16. *Kozmické čísla sú také dvojciferné čísla, ktorých výsledok po vynásobení číslom 9 má na mieste stoviek rovnakú cifru, akú malo pôvodné číslo na mieste desiatok, na mieste desiatok má cifru 0 a na mieste jednotiek má rovnakú cifru, akú malo pôvodné číslo na mieste jednotiek. Nájdi najmenšie kozmické číslo.*

Výsledok: 45
Riešenie: Pri násobení číslom 9 vieme dvojciferné číslo rozdeliť na desiatky a jednotky. Najprv vynásobíme jednotky, potom desiatky a výsledky, ktoré dostaneme, sčítame. Keď si vezmeme iba "desiatkovú" časť dvojciferného čísla, tak má na mieste jednotiek 0, takže po vynásobení číslom 9 bude mať aj výsledok 0 na mieste jednotiek. Výslednú cifru na mieste jednotiek teda ovplyvňuje iba "jednotková" časť pôvodného dvojciferného čísla. Jediná cifra, ktorá po vynásobení číslom 9 zachová na mieste jednotiek svoju hodnotu je cifra 5 (5 x 9 = 45). Kozmické čísla teda majú na mieste jednotiek cifru 5. Keďže 5 × 9 = 45 a výsledné číslo má na mieste desiatok 0, "desiatková" časť dvojciferného čísla musí dávať po vynásobení číslom 9 výsledok s cifrou 6 na mieste desiatok (aby sme dostali súčet 4 + 6 = 10, a tak vo výsledku 0 na mieste desiatok). Takúto vlastnosť má len číslo 40, 40 × 9 = 360. Takže najmenšie a zároveň jediné kozmické číslo je číslo 45.

Úloha 17. *Logo vesmírnej spoločnosti vzniklo prekrytím kosoštvorca so stranou 8 cm a rovnostranného trojuholníka so stranou 10 cm a je symetrické podľa osi, tak ako na obrázku. Prekryv je tvaru rovnostranného trojuholníka so stranou 2 cm. Kai chce obtiahnuť logo čiernou*



<u>Výsledok:</u> 104 ml

<u>Riešenie:</u> Ak by Kai prešiel fixou celým kosoštvorcom aj trojuholníkom, prešiel by 4 × 8 cm = 32 cm po kosoštvorci a 3 × 10 cm = 30 cm po trojuholníku. Spolu je to 62 cm.

Prešiel by však navyše po rovnostrannom trojuholníku 3 × 2 cm = 6 cm, takže reálne musí prejsť 56 cm. 56 cm je 8-krát 7 cm. Teda minie 8 × 13 ml náplne = 104 ml.

Úloha 18. *Vo vesmírnom SpaceBurgeri predávajú nugetky v baleniach po 2, 3, 7 a 11 kusov. Aké sú všetky počty nugetiek, ktoré si nevieme kúpiť v takýchto baleniach bezo zvyšku?*

<u>Výsledok:</u> 1

<u>Riešenie:</u> Určite si nevieme objednať 1 nugetku. Počty 2, 3, 7 a 11 nugetiek vieme získať tak, že si zoberieme dané balenie z ponuky.

4 vieme získať tak, že si kúpime dvakrát balenie po 2 kusoch.

5 tak, že si kúpime balenia o veľkosti 2 a 3.

6 kúpime ako 2 krát po 3 kusy.

8 kúpime ako 4 krát po 2 kusy.

9 kúpime ako 3 krát po 3 kusy.

10 kúpime ako 7 a 3 kusy.

Teraz už vieme urobiť všetky čísla od 2 po 11 a z nich už vieme vytvoriť všetky ďalšie počty tak, že niekoľkokrát pripočítame 10 a ešte nejaké číslo od 2 po 11.

Tým pádom jediný počet, ktorý nevieme urobiť je 1.

Úloha 19. *Traja kamaráti Dominik, Maťo a Braňo sa chystajú na cestu do vesmíru. Avšak pred odletom sa chcú Dominik a Maťo ostrihať. Maťo ostrihá Dominika za 3 hodiny. Braňo ostrihá Dominika za 2 hodiny. Dominik ostrihá Maťa za 1 hodinu. Braňo ostrihá Maťa za 2 hodiny. Strihať sa môžu súčasne, nie však dvaja navzájom. Teda Maťo nemôže strihať Dominika počas toho ako Dominik strihá Maťa, avšak Maťo môže strihať Dominika počas toho, ako je strihaný Braňom (a naopak). Taktiež platí, že dvaja vedia strihať jedného naraz. Ako dlho im bude trvať toto strihanie, ak to chcú stihnúť čo najrýchlejšie, aby čo najskôr odleteli?*

Výsledok: 1h 36 min

Riešenie: Neoplatí sa, aby Maťa strihal Braňo - ten strihá oboch rovnako rýchlo, tak môže radšej strihať Dominika a Maťa môže strihať Dominik, lebo to je najrýchlejší strih.

Dominik ostrihá Maťa za hodinu a tým pádom je Maťo vybavený. Za tú hodinu zatiaľ Braňo ostrihá polovicu Dominikovej hlavy.

Druhú polovicu Dominikovej hlavy môžu potom strihať Braňo a Maťo naraz. Koľko im to bude trvať? Nájdeme si najmenší spoločný násobok 3h a 2h (čo sú časy, ktoré by Maťovi a Braňovi trvalo ostrihať celú Dominikovu hlavu). Je to 6 hodín. Za 6 hodín by Maťo stihol dve a Braňo tri Dominikove hlavy. Spolu by teda za 6 hodín stihli 5 Dominikových hláv.

6 hodín je 360 minút. Ak za 360 minút stihnú 5 Dominikových hláv, tak jednu hlavu stihnú za 360 : 5 = 72 minút, a teda pol hlavy stihnú za 360 : 5 : 2 = 36 minút.

Dokopy teda potrebovali 1h 36min na ostrihanie Maťa a Dominika.

Úloha 20. *Na vesmírnej lodi sa nám každý deň niečo pokazilo. Chyba sa vyskytla buď doobeda, poobede alebo aj aj. Pri pozorovaní kedy sa chyby vyskytli sme sa dozvedeli takéto informácie: 13 dní sa niečo pokazilo buď doobeda alebo poobede, počas 11 dní sa niečo pokazilo doobeda a počas 12 dní poobede. Koľko dní sa nám kazilo niečo na vesmírnej lodi?*

Výsledok: 18

Riešenie: Dohromady sa niečo pokazilo 23-krát (11-krát doobeda a 12-krát poobede).

13 porúch prebehlo počas dní, keď sa pokazila iba jedna vec (doobeda alebo poobede). Zvyšných 23 − 13 = 10 porúch sa stalo počas dní, keď sa niečo pokazilo aj doobeda aj poobede, teda dvakrát za deň. Takých dní je 5 (10 porúch po 2 každý deň).

Potom je dní, keď sa niečo pokazilo, spolu 13 + 5 = 18.

Úloha 21. *Po mrkvičkovom úspechu na Marse sa kolonisti rozhodli vyskúšať pestovať mrkvičky aj na Jupiteri. Tam je však každú noc búrka, tak sa im až tak nedarilo. Martin každý deň zasadil 4 mrkvičky, no 3 z nich každú noc zničila búrka. Tretí a štvrtý deň pršalo aj počas dňa a v noci bola obzvlášť silná búrka, takže sa cez deň dali zasadiť len 3 mrkvičky a cez noc búrka zničila až 4. Počas ktorého dňa bolo v sade prvýkrát 10 mrkvičiek?*

Výsledok: 11

Riešenie: Keďže Martin cez deň zasadil 4 mrkvičky a 3 z nich zničila v noci búrka, za jeden deň a noc pribudla v sade iba jedna mrkvička. Za prvé dva dni tak pribudli 2 mrkvičky. Počas druhého a tretieho dňa zasadil 3 a cez noc búrka zničila 4, takže za tieto dni a noci ubudli 2 mrkvičky. V piaty deň teda začínal opäť od nuly a za jeden deň a noc pribudla 1 mrkvička. Na začiatku 11. dňa tak bolo v sade 6 mrkvičiek. Keď Martin cez deň zasadil 4 mrkvičky, bolo ich prvýkrát dokopy 6 + 4 = 10. Takže prvýkrát bolo v sade 10 mrkvičiek na 11. deň.

Úloha 22. *Traja hviezdni bohovia Azizos, Monimos a Sirius sa dávno pradávno rozhodli spoločne vytvoriť jedno veľké súhvezdie. Najprv začal Azizos, ktorý vytvoril 3 hviezdy a umiestnil ich do súhvezdia tvaru rovnostranného trojuholníka s dĺžkou strany 12 svetelných rokov. Potom tvoril Monimos, ktorý tiež vytvoril 3 hviezdy a umiestnil ich do stredov strán Azizovho trojuholníka. Medzi každou Azizovou a Monimovou hviezdou tak bola vzdialenosť 6 svetelných rokov. Nakoniec tvoril Sirius. Ten vytvoril 6 hviezd a umiestnil ich zvonka Azizovho trojuholníka tak, aby vytvoril šesť rovnostranných trojuholníkov. Každý tento trojuholník je tvorený jednou Azizovou, jednou Monimovou a jednou Siriovou hviezdou. Aká najdlhšia vzdialenosť vo svetelných rokoch bola medzi dvomi Siriovými hviezdami?*

Výsledok: 18 ly

Riešenie: Načrtneme si súhvezdie podľa zadania - Azizos vytvoril hviezdy A, B, C, potom Monimos hviezdy D, E, F, a potom Sirius hviezdy G, H, I, J, K, L.
Keďže celé je to symetrické (začínalo sa rovnostranným trojuholníkom a všetky úkony sa robili na všetkých troch stranách rovnako), tak je aj jedno, od ktorej Siriovej hviezdy budeme hľadať tú najdlhšiu vzdialenosť - od každej by sme našli tú istú vzdialenosť. Ak sme to načrtli aspoň trochu pekne, tak na pohľad vyzerá byť najdlhšia vzdialenosť hviezd HK (a rovnako GJ a LI).
Overíme a určíme ju jednoducho: dokreslíme si ďalšie úsečky medzi najbližšími hviezdami (čiarkované). Tieto majú tiež 6 svetelných rokov. Všetko na obrázku sú rovnaké rovnostranné trojuholníky.
Úsečka KH má 3 × 6 = 18 svetelných rokov. To, či napríklad KI nie je dlhšia overíme napríklad cez trojuholníkovú nerovnosť - úsečka KI musí byť kratšia ako súčet dĺžok KJ a JI, ktoré sú dokopy zrovna 3 strany malých trojuholníčkov, čiže 18 svetelných rokov. KI je teda kratšia.
Najdlhšie vzdialenosti medzi Siriovými hviezdami sú 18 svetelných rokov.

Úloha 23. *Rasa Vogónov čísluje svoje vesmírne lode len číslami, ktoré sú palindrómy - teda čísla, ktoré sa čítajú rovnako odpredu aj odzadu. (Jedny z ich prvých vesmírnych lodí mali čísla ..., 88, 99, 101, 111, 121, ...).*
Aký bol súčet sériových čísel dvoch lodí, medzi ktorými bola vyrobená loď číslo 1018101?

Výsledok: 2036202

Riešenie: Hodnota najmenšieho palindrómu väčšieho ako 1018101 je 1019101. Chceme totiž na čo najmenej významnom cifernom mieste zväčšiť cifru o 1 (lebo chceme prirátať čo najmenšie číslo). Je to miesto tisícok, lebo keby sme zmenili cifru na menšom mieste, napríklad na mieste stoviek, museli by sme zmeniť aj cifru na mieste desaťtisícov, aby to bol stále palindróm.
Hodnota najväčšieho palindrómu menšieho ako 1018101 je 1017101. Opäť chceme zmeniť cifru na čo najmenej významnom mieste, ale tentokrát ju o 1 znížiť (lebo chceme odpočítať čo najmenšie číslo). Z rovnakého dôvodu ako v prvom kroku to musí byť miesto tisícok.
Súčet týchto čísel je 1017101 + 1019101 = 2036202.

Úloha 24. *Štyria astronauti nazbierali dokopy 45 hviezd. Keď počet hviezd prvého astronauta zväčšíme o 2 hviezdy, počet hviezd druhého astronauta zmenšíme o 2 hviezdy a počet hviezd tretieho astronauta dáme na polovicu, budú mať všetci 4 astronauti rovnako veľa hviezd. Koľko hviezd bude mať každý?*

Výsledok: 9

Riešenie: Pozrime sa o koľko sa zmení celkový súčet hviezd. Ak prvému dve hviezdy pripočítame a druhému odpočítame, celkový počet hviezd sa nezmení. Jediná zmena je teda to, že tretiemu odpočítame polovicu hviezd.
Tretí mal na začiatku dvakrát toľko hviezd ako každý z ostatných na konci. Zmena celkového súčtu teda zodpovedá počtu hviezd jedného astronauta na konci.
Na konci mali spolu 4 krát počet hviezd astronauta a na začiatku o jeden taký počet viac, teda 5. Jeden počet hviezd astronauta na konci je preto pätina počtu hviezd na začiatku, čo je 45 : 5 = 9.

Úloha 25. *Kozmonautka Laura si obľúbila jedno dvojciferné číslo. Páči sa jej na ňom, že keď cifru na mieste desiatok zväčší o 3, dostane dvakrát väčšie číslo ako keby cifru na mieste jednotiek zväčšila o 3. Ktoré dvojciferné číslo je Laurino obľúbené?*

Výsledok: 24

Riešenie: Keď zväčší cifru na mieste desiatok o 3, znamená to, že to číslo zväčší o 30.

Rozdiel tých dvoch zväčšených čísel bude 27 - pretože obe vznikli zväčšením toho istého pôvodného čísla, jedno o 30 a druhé len o 3.
Keďže to prvé je dvojnásobok druhého a zároveň je o 27 väčšie, tak to menšie z nich musí byť 27, lebo 27 × 2 = 27 + 27. Väčšie je teda 54.
Pôvodné Laurino číslo dostaneme tým, že z väčšieho odrátame 30 alebo z menšieho 3 a v oboch prípadoch dostávavame číslo 24.

Úloha 26. *Adam bol vyslaný na ISS ako záhradník. Dostal za úlohu vysadiť tri druhy rastlín: ruže, tulipány a narcisy (nemusí zasadiť všetky). Chce ich zasadiť do záhradky tvaru štvorca zloženého zo 4 rovnakých menších štvorcov (do každého menšieho štvorca môže dať práve jeden druh). Dostal ale aj podmienku od vedcov z NASA, aby každá dvojica záhonov, ktorá susedí stranou, obsahovala rozdielny druh kvetín. Koľkými spôsobmi to môže Adam spraviť?*

Výsledok: 18
Riešenie: Ak by Adam sadil len 1 druh kvetov, určite by susedili stranou, preto musí sadiť aspoň dva druhy. Keď sadí dva druhy, rovnaké kvety nesmú susediť stranou, preto musia byť v opačných rohoch (napr. vpravo hore a vľavo dole). Medzi troma druhmi kvetov existujú 3 dvojice (ruže a tulipány, ruže a narcisy, tulipány a narcisy). Pri každej dvojici má 2 možnosti, ako ich posadiť - napr. najprv dá ruže vpravo hore a vľavo dole a tulipány do zvyšných štvorcov, potom dá ruže vľavo hore a vpravo dole a tulipány do zvyšných štvorcov. Existuje tak 3 × 2 = 6 možností, ako zasadiť dva druhy kvetov. Pri troch druhoch bude jeden druh vždy vysadený dvakrát, opäť v opačných rohoch. Rovnako ako predtým, sú 2 možnosti ako tento druh zasadiť - raz vpravo hore a vľavo dole, potom vľavo hore a vpravo dole. Keďže existujú 3 druhy, vytvára to 2 × 3 = 6 možností. Avšak zvyšné dva druhy (tie, čo sú zasadené iba raz) sa dajú zasadiť tiež 2 spôsobmi - napr. raz dám do prvého štvorca ružu a do druhého tulipán, potom dám do prvého tulipán a do druhého ružu. Počet možností pre tri druhy sa tak zdvojnásobí, 6 × 2 = 12. Keď sčítame možnosti pri sadení dvoch druhov a možnosti pri sadení troch druhov, dostaneme 6 + 12 = 18 možností.

Úloha 27. *Na Marse sa už mrkvičkám darilo, a tak vesmírna agentúra vymyslela viacero receptov založených na mrkvách. Marky išla variť 9 litrov polievky pre celú základňu, kde podľa normy musí byť na každý liter presne 8 mrkvičiek. V kuchyni však našla Vlada, ktorý si už robil polievočku len pre seba, sebec jeden. Mal v hrnci pol litra polievky a vraj to robil podľa receptu od babky, kde ide 10 mrkvičiek na liter. Marky ho vyhodila od sporáka, doliala tam ďalšiu vodu a pridala ďalšie mrkvičky. Koľko mrkvičiek musela Marky pridať, aby splnila normu?*

Výsledok: 67
Riešenie: Podľa Vladovho receptu ide do pol litra polievky 5 mrkiev. Na 1 liter ide 10 mrkiev, a teda na pol litra len polovica.
Marky doleje vodu na 9 litrov a podľa normy dá na každý liter 8 mrkiev, teda dohromady má byť v polievke 9 × 8 = 72 mrkiev. Avšak Vlado už 5 mrkiev v hrnci mal, takže jej stačí pridať o 5 menej, teda 67.

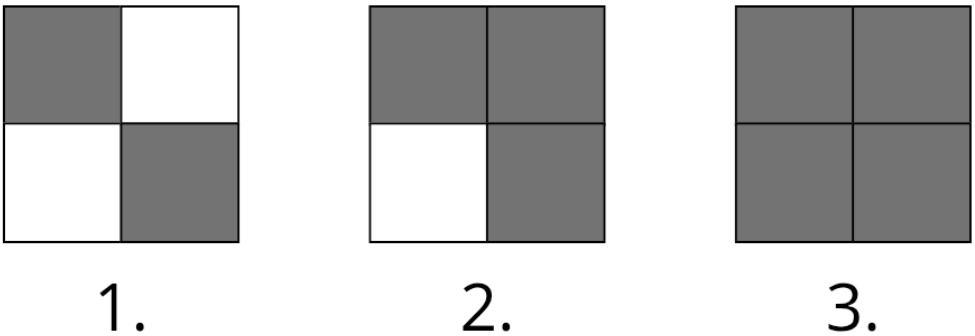
Úloha 28. *Riško sa hral s pokynmi ku postaveniu rakety a na jednej strane zbadal takýto obrázok. Na inej strane návodu bolo napísané, že číslo v štvorci musí byť dvojciferné a mať rôzne cifry.*
Riško sa na obrázok zahľadel a zistil, že existujú len dve také čísla, ktoré vie do štvorca doplniť. Ktoré to sú?

Výsledok: 36, 63

<u>Riešenie:</u> Skúsme odhadnúť, ktoré čísla by mohli mať vlastnosť zo zadania. Ak má dvojciferné číslo na mieste desiatok cifru 1, tak súčin cifier je menší ako súčet cifier. Vtedy podmienka zo zadania určite neplatí. Ak má na mieste desiatok cifru 2, tak súčin cifier je dvojnásobok cifry na mieste jednotiek. Podľa podmienky by tak mal byť súčet cifier rovný polovici tohto čísla, a teda rovný cifre na mieste jednotiek. Súčet cifier tohto čísla je však o 2 väčší.
Ak teraz skúsime hľadať medzi číslami s cifrou 3 na mieste desiatok, vieme nájsť vyhovujúce číslo 36 (platí totiž $3 \times 6 = 18 = 2 \times (3 + 6)$). Zostáva nájsť ešte to druhé číslo, o ktorom hovorí zadanie. Aby sme ho nemuseli hľadať ako doteraz, spravme nasledujúce pozorovanie: ak vymeníme cifry dvojciferného čísla, nezmeníme ani súčin cifier, ani súčet cifier. Vyhovovať preto bude aj číslo 63.

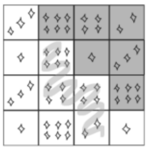
Úloha 29. *Keď astronauti docestovali na Venušu, chceli si oddýchnuť od beztiažového stavu a tak sa rozhodli postaviť si stavbu z kociek. Keďže Venuša má gravitáciu, kocky nemôžu levitovať. Koľko možností postavenia stavby z kociek majú v prípade ak chcú, aby pohľad zboku, zhora a spredu vyzerali ako štvorec 2 × 2?*

<u>Výsledok:</u> 7
<u>Riešenie:</u> Zhora je pohľad 2 × 2 štvorec, tým pádom musí byť celé prvé poschodie zaplnené. Pretože na druhom poschodí nevie byť kocka bez toho, aby pod ňou bola iná kocka na prvom poschodí. Na druhom pochodí aby sedel pohľad spredu a zboku musí byť jedna z týchto možností:



Keď je to prvá možnosť, tak ju vieme aj otočiť, teda sú dve možnosti ako môžu byť uložené dve kocky na druhom poschodí. Ak sú na druhom poschodí tri kocky, tak ich vieme 4-krát otočiť. A tretia možnosť, kde sú 4 kocky, sa dá uložiť iba jedným spôsobom, pretože tú nevieme nijako otočiť. Celkový počet možností je preto $2 + 4 + 1 = 7$.

Úloha 30. *Dorka sa na dnešnom Matboji tiež vydala do vesmíru. Počas dlhého letu však zabudla, akú farbu má jej vesmírna loď. Ocitla sa v časti vesmíru, ktorá vyzerá ako na obrázku. Políčka, ktoré už sú zakryté, sú vyfarbené sivou. Kam má Dorka umiestniť svoju loď, aby pozbierala čo najviac hviezdičiek, nech už je farba jej lode akákoľvek? Dorkina loď má tvar ako na obrázku a môže sa ľubovoľne (aj zrkadlovo) otáčať.*



<u>Výsledok:</u>
<u>Riešenie:</u> Loď chceme položiť na miesto, na ktorom by loď akejkoľvek farby pozbierala čo najviac hviezdičiek. Keďže iba loď žltej farby vie zbierať hviezdičky bez toho, aby sa dotýkala už zakrytého políčka, chceme našu loď položiť tak, aby sa dotýkala už zakrytých políčok. Rozoberme si každú farbu zvlášť: ružová loď zbiera súčet hviezdičiek na dvoch zakrytých políčkach s najväčším počtom

hviezdičiek, ktoré s ňou susedia. Takže chceme, aby sa naša loď dotýkala aspoň dvoch zakrytých políčok a aby na nich bolo čo najviac hviezdičiek. Naša loď sa vie dotknúť iba políčka so 6, 1 a 6 hviezdičkami, takže najlepšie by bolo, keby sa dotýkala oboch políčok so 6 hviezdičkami. Modrá loď zbiera súčin políčka s najmenším počtom hviezdičiek, ktoré zakryla a počtu strán, ktorými sa dotýka iných zakrytých políčok. Chceme teda, aby sa naša loď dotýkala zakrytých políčok čo najviac stranami a aby najmenšie číslo, ktoré naša loď zakryje, bolo čo najväčšie. Skúsime sa teda vyhnúť políčkam s 1 hviezdičkou. Žltá loď zbiera súčet hviezdičiek na všetkých políčkach, ktoré zakryla, takže chceme zakryť políčka, na ktorých je čo najviac hviezdičiek. Zelená loď zbiera súčet hviezdičiek na všetkých políčkach, ktoré zakrýva, okrem toho s najväčším počtom hviezdičiek. Chceme teda, aby bol súčet hviezdičiek na zakrytých políčkach čo najväčší aj bez políčka s najviac hviezdičkami. Existuje 6 možností, ako môžeme umiestniť loď tak, aby sa dotýkala už zakrytého políčka. Z týchto možností je len jedna taká, že sa naša loď dotýka oboch políčok so 6 hviezdičkami, dotýka zakrytých políčok štyrmi svojimi stranami, nezakrýva políčko s 1 hviezdičkou a zároveň zakrýva políčka s čo najviac hviezdičkami. Táto možnosť je znázornená na obrázku.

Úloha 31. *V budúcnosti budú ľudia chodiť raketami na dovolenku na Mesiac. Zatiaľ nimi chodia len mimozemšťania. Za každú hodinu meškania rakety dostanú poukážku hodnoty 1,5 €. Hranolky v jedálenskej časti stoja 5,5 € a kečup stojí 1 €. Raketou ide sám mimozemšťan, ktorý si chce kúpiť 2 hranolky a 1 kečup. Koľko hodín musí meškať raketa, aby vedel tento nákup zaplatiť iba poukážkami?*

Výsledok: 8h

Riešenie: Hranolky stoja 5,5 € a mimozemšťan si ich chce kúpiť dvojo. Za hranolky teda zaplatí 11 €. Ale chce ešte aj 1 kečup, ktorý stojí 1 €, preto ho celý nákup bude stáť 12 €. Jedna poukážka má hodnotu 1,5 €, takže vypočítame 12 € : 1,5 € = 8. Raketa musí meškať 8 hodín na to, aby si tento nákup vedel zaplatiť čisto poukážkami.

Úloha 32. *Alex išiel raketou na dovolenku na Mesiac. Keďže sa počas cesty nudil, tak si zapisoval vesmírne tvary asteroidov. Asteroidy mali tvary trojuholníka, štvorca a osemuholníka. Všetky asteroidy, ktoré videl, mali spolu 85 vrcholov. Koľko najviac osemuholníkových asteroidov mohol Alex vidieť?*

Výsledok: 9

Riešenie: Máme 85 vrcholov, osemuholník má 8 vrcholov, štvorec má 4, trojuholník má 3. Chceme zistiť koľko najviac osemuholníkov mohol Alex vidieť. Teoreticky ich najviac môže byť 85 : 8 = 10, ale ostane 5 vrcholov a tie nevieme rozdeliť medzi štvorce a trojuholníky bez toho, aby nám ostali vrcholy. Preto skúsme teraz 9 osemuholníkov, kedy nám ostane 13 vrcholov, ktoré už vieme rozložiť medzi 1 štvorec a 3 trojuholníky a neostanú nám žiadne vrcholy.

Úloha 33. *Počas cesty na Mesiac sa pokazila navigácia. Aby ju Braňo opravil, musí zistiť trojciferný kód. Vie, že v kóde 245 sú 2 cifry správne a sú aj na správnych miestach, a že súčet cifier kódu je 13 a súčin 80. Aký je správny kód?*

Výsledok: 445

Riešenie: Začneme kombinovať čísla 2 a 4, kde nám do súčtu 18 chýba 7. A keď sa pozrieme na ich súčin 2 × 4 × 7 = 56, tak to nie je želaných 80.

Pri kombinácii 2 a 5 nám do súčtu 18 chýba 6. Súčin by tak bol 2 × 5 × 6 = 60, čo opäť nie je želaných 80.

Nakoniec pri kombinácii 4 a 5 nám do súčtu 18 chýba 4. Súčin je 4 × 4 × 5 = 80, čo vychádza. A teda kód je 445.

Úloha 34. *Alex išiel behať po Mesiaci a poprosil Jožka, aby mu zmeral čas. Jožko zapol ručičkové hodiny, ale tie mu prestali fungovať, keď sa sekundová ručička otočila okolo ciferníka 4 a trištvrtekrát. V tom momente spustil presýpacie hodiny, ktorým trvá jeden presyp 30 sekúnd. Avšak po 5 presypoch prestalo Jožka baviť sa na ne pozerať a radšej zapol stopky na telefóne. Alex dobehol, keď mu stopky ukazovali 24 sekúnd. Ako dlho Alex behal?*

Výsledok: 7 min 39s

Riešenie: Na ručičkových hodinkách sa sekundová ručička otočila okolo ciferníka 4 a trištvrte krát, čo znamená, že prešlo 4 × 60 sekúnd plus 45 sekúnd. Teda dokopy 4 minúty a 45 sekúnd. Presýpacie hodiny sa presýpali 5-krát a jeden presyp im trvá 30 sekúnd, čo je dokopy 5 × 30 sekúnd, teda 2 minúty a 30 sekúnd. Stopky mu ukázali 24 sekúnd. Toto všetko dokopy nám dá 4 minúty 45 sekúnd + 2 minúty 30 sekúnd + 24 sekúnd = 7 minút a 39 sekúnd a to je čas, ako dlho Alex behal.

Úloha 35. *Na Jupiterovom mesiaci Európa objavili život, a preto tam teraz otvárajú nový SpaceBurger. V ponuke majú lízatko za 1 €, džús za 2 € a bagetu za 3 €. Máme 6 € a chceme ich v SpaceBurgeri minúť všetky. Koľko rôznych nákupov vieme urobiť?*

Výsledok: 7

Riešenie: Začneme tým, koľko bagiet si kúpime. Keď si kúpime 2 bagety, ostane nám 0 €, čo je prvá vhodná možnosť nákupu. Keď si kúpime 1 bagetu, ostanú nám 3 € a tie vieme nakombinovať ako 1 džús (2 €) a 1 lízatko (1 €) alebo ako 3 lízatká (trikát 1 €), teda existujú ďalšie 2 možnosti. Keď si kúpime 0 bagiet, tak nám ostane celých 6 € na džúsy a lízatká. Z toho vieme nakombinovať v jednom nákupe 3 džúsy (trikrát 2 €), v druhom nákupe 2 džúsy (dvakrát 2 €) a 2 lízatka (dvakrát 1 €), v treťom nákupe 1 džús (2 €) 4 lízatka (štyrikrát 1 €) a v štvrtom nákupe 6 lízatiek (šesťkrát 1 €). Existujú teda ďalšie 4 možnosti. Počet rôznych nákupov tak je 1 + 2 + 4 = 7.

Úloha 36. *Katka išla lanovkou na Mesiac. Jednotlivé sedačky na lanovke sú očíslované od 1 po nejaké číslo, pričom v takomto poradí sú tieto sedačky aj zoradené na lanovke. Katka sa viezla sedačkou s číslom 42. Keď bola presne v strede lanovky, všimla si oproti sedačku s číslom 17. Koľko sedačiek má lanovka na Mesiac?*

Výsledok: 50

Riešenie: Medzi číslami 17 a 42 sa nachádza 24 čísel. Keďže sa Katka na sedačke 42 nachádza spolu so sedačkou 17 presne v strede lanovky, vieme, že pred nimi aj za nimi bude rovnaký počet sedačiek, teda 24. Dohromady pred a za nimi je 2 × 24 = 48 sedačiek.
Do celkového počtu ešte prirátame dve sedačky, Katkinu a sedačku číslo 17. Všetkých sedačiek je preto 48 + 2 = 50.

Úloha 37. *Asteroid 165 Loreley má tvar blízky kocke s dĺžkou hrany 100 km. V strede jednej jej steny sa nachádza mravec Ferdstrong. Snaží sa zistiť, ktorý zo stredov stien je pre život najvhodnejší. Preto sa vydal na prechádzku po asteroide, počas ktorej chce navštíviť všetky stredy stien. Akú najkratšiu vzdialenosť musí Ferdstrong prejsť?*

Výsledok: 500km

Riešenie: Z jedného stredu steny na druhý sa dá dostať najkratšie cez stred hrany, ktorú majú spoločnú. Na prejdenie z jedného stredu steny na vedľajší Ferdstrong prejde dvakrát polovičnú dĺžku steny, čo je 100km. Tým, že kocka má 6 stien, tak treba 5 prechodov medzi stenami, teda 5 × 100 km = 500 km

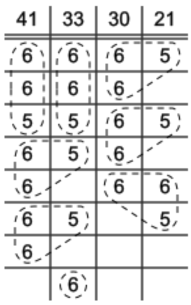
---

Úloha 38. *V minulosti sa spojili 3 asteroidy guľovitého tvaru s priemermi 4 km, 6 km a 8 km, ktoré sa navzájom dotýkali. Vesmírne mravce sa rozhodli si v stredoch týchto asteroidov vytvoriť základne a všetky ich navzájom prepojiť najkratšími možnými cestami. Aký je súčet dĺžok týchto troch ciest?*

Výsledok: 18 km
Riešenie: Najkratšia cesta medzi ľubovoľnými dvomi základňami sa dá rozdeliť na polomer gule, v ktorej sa nachádza prvá z týchto základní a polomer gule, v ktorej sa nachádza druhá základňa. Z každej základne vychádzajú presne dve cesty do zvyšných dvoch základní. Polomer každej gule bude teda v súčte dĺžok všetkých ciest započítaný dvakrát. Polomery jednotlivých gúl sú 2 km, 3 km a 4 km. Súčet dĺžok všetkých ciest bude preto 2 × (2 km + 3 km + 4 km) = 18 km.

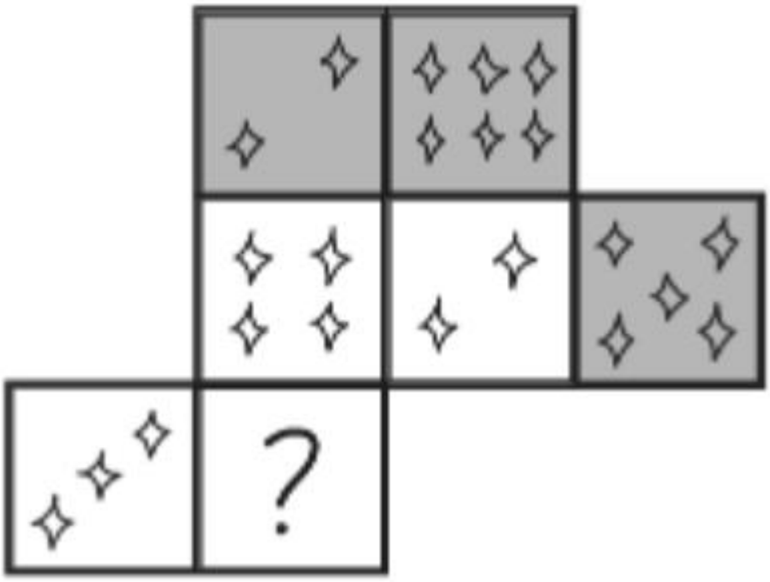
Úloha 39. *Čarovný mimozemšťan Merlin hrá s astronautmi hru Človeče, nehnevaj sa. Pri nej sa hádže klasickou hracou kockou. Hráč na ťahu hodí kockou a posunie ľubovoľnú figúrku o toľko políčok, koľko padlo na kocke. Ak však padne na kocke šestka, môže v rámci ťahu hádzať ešte raz. Merlin má na plániku 4 figúrky, ktoré potrebuje dostať na políčka vzdialené postupne 21, 30, 33 a 41 políčok. Keďže Merlin je čarovný mimozemšťan, vie ovládať, čo padne na kocke. Aby to však spoluhráčom nebolo príliš nápadné, nikdy nedopustí, aby mu padli viac ako dve šestky za sebou. Koľko najmenej ťahov musí Merlin vykonať, aby sa dostal všetkými figúrkami na požadované políčka?*

Výsledok: 8
Riešenie: Dokopy sa Merlin potrebuje posunúť o 21 + 30 + 33 + 41 = 125 políčok.
Ak v jednom ťahu môže hodiť najviac dve šestky, tak sa môže posunúť o najviac 6 + 6 + 5 = 17 políčok, takže teoreticky potrebuje najmenej 125 : 17 = 7 a nejaký zvyšok, čiže potrebuje aspoň 8 ťahov.
Mohli by sme si overiť, či sa mu naozaj podarí nakombinovať tých 8 ťahov tak, aby to išlo. Napríklad takto:



pričom v poslednom ťahu pri tomto hádzaní hodí už len šestku a vyhrá.

Úloha 40. *Dorka ani na konci svojej výpravy netušila, akej farby je jej vesmírna loď. Teda, vedela, že nie je žltá, lebo ju nevedela položiť na miesto, ktoré nesusedilo so zakrytými políčkami. Po ceste domov si chcela zapísať počty hviezdičiek na susediacich zakrytých políčkach (tie vyfarbila sivou) a počty hviezdičiek na políčkach, ktoré zakryla svojou loďou. Na jedno políčko, ktoré zakryla, si však nevedela spomenúť. Aký bol súčet rôznych počtov hviezdičiek, ktoré mohla pozbierať? Maj na mysli, že nevieme, či je Dorkina loď ružová, modrá* *alebo* *zelená.*



Výsledok: 44

Riešenie: Pozrime sa postupne na všetky možné farby lode a počty hviezdičiek, ktoré mohla Dorka pozbierať. Ružová loď zbiera súčet hviezdičiek na dvoch zakrytých políčkach s najväčším počtom hviezdičiek, ktoré s ňou susedia. Dorkina loď susedí so zakrytými políčkami s 2, 5 a 6 hviezdičkami, takže ak by jej loď bola ružová, pozbierala by 5 + 6 = 11 hviezdičiek. Modrá loď zbiera súčin políčka s najmenším počtom hviezdičiek, ktoré zakryla a počtu strán, ktorými sa dotýka iných zakrytých políčok. Dorkina loď sa dotýka susediacich zakrytých políčok tromi stranami. Ak by na políčku s otáznikom bola 1 hviezdička, modrá loď by pozbierala 3 × 1 = 3 hviezdičky. Ak by na políčku s otáznikom bola viac ako 1 hviezdička, políčko s najmenším počtom hviezdičiek, ktoré Dorkina loď zakryla, by malo 2 hviezdičky. Modrá loď by v takom prípade pozbierala 3 × 2 = 6 hviezdičiek. Zelená loď zbiera súčet hviezdičiek na všetkých políčkach, ktoré zakryla, okrem toho s najväčším počtom hviezdičiek. Ak by políčko s otáznikom malo najviac hviezdičiek spomedzi políčok, ktoré Dorkina loď zakryla, loď by pozbierala 4 + 3 + 2 = 9 hviezdičiek. Ak by políčko s otáznikom nemalo najviac hviezdičiek, najviac hviezdičiek by muselo mať políčko so 4 hviezdičkami. Na políčku s otáznikom by tak mohli byť 4, 3, 2 alebo 1 hviezdička, teda zelená loď by mohla pozbierať 4 + 3 + 2 = 9, 3 + 3 + 2 = 8, 2 + 3 + 2 = 7 alebo 1 + 3 + 2 = 6 hviezdičiek. Dorka tak mohla pozbierať 3, 6, 7, 8, 9 a 11 hviezdičiek. Súčet týchto počtov je 3 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11 = 44.

Úloha V1. *Kuba od detstva zaujímali roboty, preto nie je prekvapením, že sa z neho stal inžinierom. Nedávno vyhrabal na povale starého robota a dosku s číslami, o ktorej si myslí, že patrí k robotovi. Dosku vidíš na obrázku. Kubo položil robota na štvorček s číslom 9. Robot sa hneď začal hýbať. Kubo si všimol, že robot sa pohne iba na políčko, ktoré s predošlým políčkom susedí stranou a ktoré má* *v sebe napísané menšie číslo. Preto Kubovi napadlo, že možno sa vie takto robot dostať až na políčko s číslom 1. Koľkými rôznymi trasami sa vie robot dostať z políčka s číslom 9 na políčko s číslom 1?*

5	4	3	3	1
4	5	4	3	2
6	6	3	4	4
7	7	6	5	6
9	8	7	6	4

Výsledok: 4

Riešenie: Aby sme sa z políčka s číslom 9 dostali na políčko s číslom 1, musíme štyrikrát odbočiť doprava a štyrikrát odbočiť hore. To znamená, že medzi políčkami s číslami 9 a 1 musí byť minimálne 8 krokov.

Keďže sa robot môže vždy presunúť iba na políčko s menším číslom, musí postupne prejsť všetkými políčkami s číslami od 8 po 2. Preto sa môže pohybovať len na také políčko, ktoré má číslo presne o 1 menšie. Políčka, po ktorých robot prejde, označíme šedou.

Môžeme si všimnúť, že ak začneme na políčku s číslom 9, vetvenie trás nastáva pomerne neskoro a mnohé trasy nevedú k políčku 1. Preto je výhodné úlohu obrátiť, aby sa počet možností redukoval skôr. Robot začne na políčku s číslom 1 a môže sa pohybovať iba na políčka s číslom o 1 väčším.

Vidíme, že robot sa hneď musí dostať na políčko s číslom 3. Z tohto políčka vedú dve možnosti na políčka s číslom 4. Cez políčko, ktoré je vľavo, sa dá dostať k políčku s číslom 9 len jednou trasou.

Políčko s číslom 4, ktoré je pod ním, vedie k políčku s číslom 5 (označenému tmavošedou). Tu vzniká podobná situácia ako pri políčku s číslom 3. Robot môže ísť buď na políčko s číslom 6, ktorého trasa vedie priamo k 9, alebo na políčko s číslom 6, ktoré je vľavo (označené čiernou), z ktorého môže pokračovať na dve rôzne políčka s číslom 7 a potom priamo do 9.

Celkovo tak vzniknú 4 rôzne trasy, ktorými sa robot môže isť.

Úloha V2. *Tete má 10 meteoritov. Na každom je napísané poradové číslo podľa toho, v akom poradí dopadli na Zem. Chcela by si vybrať niekoľko z nich a nafarbiť ich na modro. Pritom však nechce, aby medzi modrými meteoritmi boli dva také, že jeden z nich je násobkom druhého. Aký najväčší súčet môžu mať modré meteority?*

Výsledok: 40

Riešenie: Ak namaľujeme 10, tak si tým znemožníme namaľovať jeho deliteľov, teda 1, 2 a 5. Keďže súčet týchto deliteľov je menší ako 10, oplatí sa nám číslo 10 namaľovať. Rovnakou úvahou zistíme, že sa oplatí namaľovať aj 9, 8, 7 a 6, pretože súčet ich menších deliteľov spomedzi čísel od 1 do 10 je vždy menší než samotné číslo. Ostatné čísla už namaľovať nemôžeme, pretože každé z nich je deliteľom niektorého z už vybraných čísel. Súčet týchto čísel je 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 40, takže najväčší možný súčet modrých meteoritov je 40.

Úloha V3. *Na opustenej mimozemskej lodi našla Klárka tri farebné kartičky. Každá z nich mala na oboch stranách napísané nejaké tvrdenie. Klárka položila kartičky na stôl tak, že sa dali prečítať nasledujúce tvrdenia: Červená: "Tvrdenie na opačnej strane tejto karty je nepravdivé." Oranžová: "Tvrdenie na opačnej strane fialovej karty je nepravdivé." Fialová: "Tvrdenie na opačnej strane oranžovej karty je nepravdivé." Koľko zo všetkých 6 tvrdení mohlo byť pravdivých? Nájdi všetky možnosti.*

Výsledok: 3

Riešenie: Pozrime sa postupne na tvrdenia, ktoré vieme prečítať. Ak je tvrdenie, ktoré vidíme na červenej karte pravdivé, tvrdenie na opačnej strane karty je nepravdivé. Ak to tvrdenie, ktoré vidíme, pravdivé nie je, tvrdenie na opačnej strane musí byť pravdivé. V každom prípade bude na červenej karte napísané jedno pravdivé a jedno nepravdivé tvrdenie. Ak je tvrdenie, ktoré vidíme na oranžovej karte pravdivé, tvrdenie na opačnej strane fialovej karty je nepravdivé. Ak to tvrdenie, ktoré na oranžovej karte vidíme, pravdivé nie je, na opačnej strane fialovej karty musí byť pravdivé tvrdenie. V oboch prípadoch bude jedno z dvoch tvrdení pravdivé a druhé nie. Rovnaká situácia nastáva pri tvrdení, ktoré vidíme na fialovej karte: buď je pravdivé, teda na opačnej strane oranžovej karty je nepravdivé tvrdenie, alebo pravdivé nie je a na opačnej strane oranžovej karty je pravdivé tvrdenie. V oboch možnostiach máme jedno pravdivé a jedno nepravdivé tvrdenie. Celkovo tak bude vždy polovica tvrdení pravdivá a polovica nie, preto zo šiestich tvrdení mohli byť pravdivé najviac tri.

Úloha V4. *6 mimozemšťanov si kúpilo žreby na lotériu. Povedali nám týchto 6 pravdivých tvrdení. Určte, ktorí mimozemšťania vyhrali.*

1. Ak Aarix vyhral, potom vyhral aj Corfux.
2. Bleron vyhral práve vtedy, ak Daaalak nevyhral.
3. Ak En'mio vyhral, tak Florbx nevyhral.
4. Buď vyhral Florbx alebo Daaalak.
5. Aarix a Florbx neprehrali zároveň.
6. En'mio vyhral.

Výsledok: Aarix, Corfux, Daaalak, En'mio

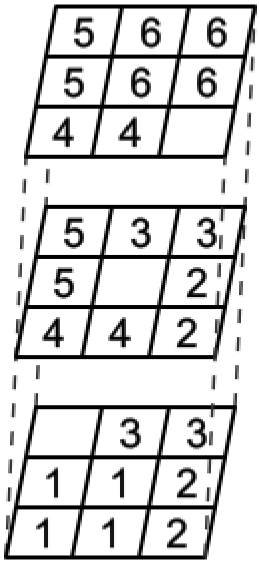
Riešenie: Vieme, že En'mio vyhral a teda podľa podľa 3. tvrdenia vieme aj to, že Florbx nevyhral. 5. tvrdenie nám hovorí, že Florbx a Aarix neprehrali zároveň a keďže Florbx prehral, tak Aarix musel vyhrať. A ešte vďaka 4. tvrdeniu vieme, že vyhral Florbx alebo Daaalak a už poznáme to, že Florbx prehral, čiže Daaalak musel vyhrať. Zatiaľ vieme, že Aatrix vyhral, Daaalak vyhral, En'mio vyhral a Florbx prehral. A ešte sme nevyužili 1. a 2. tvrdenie. 1. tvrdenie nám hovorí, že ak Aarix vyhral, tak aj Corfux vyhral a 2., že Bleron vyhral práve vtedy, keď Daaalak nevyhral, ale keďže Daaalak vyhral, tak Bleron prehral.
Čiže mimozemšťania, ktorí vyhrali sú: Aarix, Corfux, Daaalak a En'mio.

Úloha V5. *Kaja by chcela rozšíriť svoju vesmírnu agentúru a štartovať rakety aj z Marsu. Chcela by preto vedieť rakety zostavovať priamo na Marse, no na to tam potrebuje najprv dostať všetky súčiastky. Má k dispozícii iba škatuľky s rozmerom 3 dm x 3 dm x 3 dm. Súčiastky majú rozmery 2 dm x 2 dm x 1 dm. Aby ušetrila miesto, chcela by do jednej škatuľky zmestiť čo najviac súčiastok. Koľko najviac súčiastok sa zmestí do škatuľky a ako ich do nej vie Kaja uložiť?*

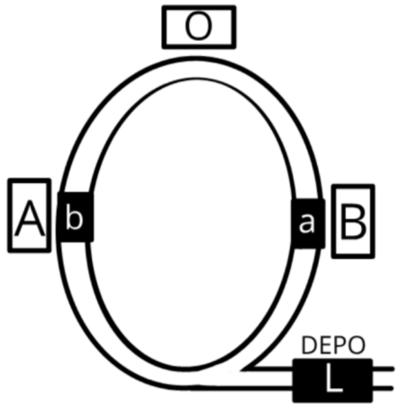
Výsledok: 6

Riešenie: Objem škatuľky je $3 \times 3 \times 3 = 27$ dm^3 a objem jednej súčiastky je $2 \times 2 \times 1 = 4$ dm^3. Teda ak sa pozrieme na to, koľkokrát sa nám vojde súčiastka s objemom 4 dm^3 do 27 dm^3, dostaneme 27 : 4 = 6 zv. 3. Teda vieme, že by sa nám teoreticky malo vojsť 6 súčiastok. Ak sa tam budú dať rozumne

naukladať... Keďže škatuľka má nepárne rozmery, a súčiastky majú v dvoch rozmeroch párnu veľkosť, možno to bude problém a nepôjde ich tam 6. Skúsime...
Myšlienka, ktorá nám pomôže, je, že v každej vrstve musí ostať práve jedno voľné "políčko" - keďže súčiastku vieme uložiť tak, že do jednej vrstvy zasiahne buď dvoma, alebo všetkými 4 políčkami, tak v každej vrstve bude vždy obsadený párny počet políčok. Čiže ak majú ostať 3 voľné (lebo 27 : 4 má zvyšok 3), tak to bude v každej vrstve jedno. To isté musí platiť nie len o vodorovných vrstvách, ale aj ľavo-pravých, aj o predo-zadných. Čiže ak ostanú voľné tri políčka na telesovej uhlopriečke, môže to byť fajn.
Skúšam teda tak, že si uložím tri súčiastky do spodnej vrstvy (viď 1, 2, 3 na obrázku), dve z nich presahujú aj do druhej vrstvy... A symetricky spravím to isté v tretej vrstve (4, 5, 6).



Úloha V6. *Palivo do vesmírnych lodí sa vyrába vo veľkej továrni. Sú tam 2 veľké nádrže A a B a jedno pracovisko s otvoreným ohňom O. Nádrže a pracovisko O sa nachádzajú pri koľajniciach, ktoré vedú dookola továrne ako na obrázku. Na koľajniciach stoja dva vagóny naplnené výbušnými látkami ("a" a "b"), lokomotíva (L) stojí v depe. Po správnosti by mal byť vagón "a" odstavený pri nádrži A a vagón "b" pri nádrži B, avšak zamestnanec továrne Gregor si ich pri presúvaní pomýlil, a tak sú prehodené. Teraz chce Gregor nájsť spôsob, ako premiestniť vagóny na svoje miesto. Vagóny však nemôžu prejsť okolo pracoviska O, pretože by ihneď vybuchli. Všade inde môžu prechádzať aj zastať. Lokomotíva L okolo pracoviska O prejsť môže. Na konci musí stáť lokomotíva L opäť v depe. Lokomotíva dokáže vagóny ťahať i tlačiť, vie ísť dopredu i cúvať a môže presúvať aj jeden, aj oba vagóny naraz. Na začiatku je lokomotíva otočená smerom k okruhu trate. Ako má Gregor postupovať, aby dostal vagóny na ich správne miesto?*



<u>Výsledok:</u> Postup, ako presúvať vagóny tak, aby sme neporušili pravidlá, existuje a je vysvetlený vo vzorovom riešení.

<u>Riešenie:</u> Všimnime si, že ak by sme jeden vagón posunuli v nejakom smere (napr. v smere hodinových ručičiek), druhý vagón by sme museli posunúť v rovnakom smere, aby sme jeho posunutím neodtlačili prvý vagón naspäť tam, kde pôvodne bol. Avšak, to by znamenalo, že jeden z vagónov by prešiel okolo pracoviska s otvoreným ohňom O, čo sa nesmie stať. Keď teda presúvame jeden vagón, druhý musí byť mimo trate. Jediné miesto mimo trate, kam môžeme vagón odstaviť, je depo. Lokomotíva teda musí jeden z vagónov presunúť do depa. Všimnime si, že to musí byť vagón "a", lebo vagón "b" by bol po presunutí do depa pred lokomotívou a blokoval by jej pohyb. Vagón "a" vieme presunúť do depa nasledovne: Lokomotíva vyjde z depa, zacúva k vagónu "a", pripojí ho za seba, po dolnej koľaji sa posunie dopredu, zacúva do depa a tam odpojí vagón "a". Teraz môže lokomotíva presunúť vagón "b". Môže tak spraviť buď tak, že ho pripojí spredu, zacúva k nádrži B, kde ho odpojí a potom zacúva okolo O naspäť do depa, alebo najprv zacúva okolo O, pripojí vagón "b" zozadu a dotlačí ho cúvaním k nádrži B, kde ho odpojí. Teraz si musíme dať pozor na to, aby po presunutí vagóna "a" zostala lokomotíva na dolnej koľaji, aby sa vedela nakoniec dostať naspäť do depa. Všimnime si, že jediný spôsob, ako vagón "a" dostať k nádrži A je tak, že ho bude lokomotíva ťahať za sebou dopredu. Vtedy však lokomotíva skončí na hornej koľaji. Aby sa vedela pohnúť, vagón "b" musí byť v tej chvíli v depe. Postup je teda nasledovný: Lokomotíva pripojí za seba vagón "a" a vyjde z depa, potom zacúva k vagónu "b", ktorý pripojí za vagón "a". Pohne sa dopredu po dolnej koľaji a potom zacúva do depa, kde vagón "b" odpojí. Potom dotiahne vagón "a" k nádrži A, odpojí ho a prejde smerom dopredu okolo O. Zacúva do depa, kde pripojí vagón "b", vyjde z depa a zacúva k nádrži B, kde vagón "b" odpojí. Pohne sa dopredu po dolnej koľaji a nakoniec zacúva naspäť do depa. Vagóny sú nevybuchnuté, odstavené na správnom mieste a lokomotíva je v depe, takže toto je postup, ktorý by mal Gregor vykonať.